1. Пусть множества A и B равномощны. Докажите, что множества $A \times A$ и $B \times B$ также равномощны.

2. Установите взаимно однозначное соответствие между натуральными числами и множеством слов в алфавите русского языка (слова — любые конечные последовательности букв).

3. Докажите, что множество простых чисел счетно.

4. Докажите, что множество конечных подмножеств рациональных чисел счетно.

5. Пусть множество A конечно, а множество B счетно. Докажите, что множество функций $f\colon A \to B$ счетно.

6. Функция называется периодической, если для некоторого числа T и любого x выполняется $f(x+T) = f(x)$. Докажите, что множество периодических функций $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ счетно.

7. Установите взаимно однозначное соответствие между отрезком $[0,1]$ и интервалом $(0,1)$.

8. Пусть A бесконечно, а B счетно. Верно ли, что множество $A \cup B$ равномощно множеству A?

9. Установите взаимнооднозначное соответствие между интервалом (a,b) и $(a,b) \cup \mathbb{Z}$.

10. Установите взаимнооднозначное соответствие между окружностью радиуса 1 и окружностью радиуса $R > 0$.

11. Установите взаимнооднозначное соответствие между окружностью и квадратом (без внутренности).

12. Установите взаимнооднозначное соответствие между кругом без границы и кругом с границей.

Множество A будем называть конечным, если для некоторого натурального n есть биекция из A в $\{1,\ldots,n\}$. При этом n называется мощностью A.

13. Докажите, что если $A \sim \{1,\ldots,n\}$ и $A \sim \{1,\ldots,k\}$, то $k = n$ (определение мощности конечных множеств корректно).

14. Докажите, что если A конечно и $B \subseteq A$, то

а) B конечно;

б) $|B| \leq |A|$;

в) $|B| = |A| \Leftrightarrow B = A$;

г) $|B| < |A| \Leftrightarrow B \subsetneq A$.

15. Докажите, что только бесконечное множество может быть равномощно собственному подмножеству;

16. Докажите, что любое подмножество счетного множества конечно или счетно.