**Занятие 6. Мощность множеств-1**

**1.** Пусть множества $A$ и $B$ равномощны. Докажите, что множества $A \times A$ и $B \times B$ также равномощны.

**2.** Докажите, что множество простых чисел счетно.

**3.** Докажите, что множество конечных подмножеств рациональных чисел счетно.

**4.** Установите взаимно однозначное соответствие между множеством бесконечных последовательностей из 0 и 1 и множеством бесконечных последовательностей из **а)** 0, 1, 2, 3; **б)** 0, 1, 2.

**5.** Пусть множество $A$ конечно, а множество $B$ счетно. Докажите, что множество функций $f\colon A \to B$ счетно.

**6.** Функция называется периодической, если для некоторого числа $T$ и любого $x$ выполняется $f(x+T) = f(x)$. Докажите, что множество периодических функций $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ счетно.

**7.** Установите взаимно однозначное соответствие между отрезком $[0,1]$ и интервалом $(0,1)$.

**8.** Пусть $A$ бесконечно, а $B$ счетно. Верно ли, что множество $A \cup B$ равномощно множеству $A$?

**9.** Установите взаимнооднозначное соответствие между интервалом $(a,b)$ и $(a,b) \cup \mathbb{Z}$.

**10.** Установите взаимнооднозначное соответствие между окружностью радиуса 1 и окружностью радиуса $R > 0$.

**11.** Установите взаимнооднозначное соответствие между окружностью и квадратом (без внутренности).

**12.** Установите взаимнооднозначное соответствие между кругом без границы и кругом с границей.

Множество $A$ будем называть конечным, если для некоторого натурального $n$ есть биекция из $A$ в $\{1, \ldots, n\}$. При этом $n$ называется мощностью $A$.

**13.** Докажите, что если $A \sim \{1, \ldots, n\}$ и $A \sim \{1, \ldots, k\}$, то $k = n$ (определение мощности конечных множеств корректно).

**14.** Докажите, что если $A$ конечно и $B \subseteq A$, то

**а)** $B$ конечно;

**б)** $|B| \leqslant |A|$;

**в)** $|B| = |A| \Leftrightarrow B = A$;

**г)** $|B| < |A| \Leftrightarrow B \subsetneq A$.

**15.** Докажите, что только бесконечное множество может быть равномощно собственному подмножеству;

**16.** Докажите, что любое подмножество счетного множества конечно или счетно.

**17.** Докажите, что для всякой функции $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ существуют три биекции $g_1, g_2, g_3\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, такие что для всякого целого $x$ верно $f(x) = g_1(x) + g_2(x) + g_3(x)$.

**Дискретная математика** **Пилотный поток**

**Домашнее задание 6**

**1.** Верно ли, что если $A \setminus B$ бесконечно, а $B$ счетно, то $A \setminus B$ равномощно $A$?

**2.** Верно ли, что если $A$ бесконечно, а $B$ счетно, то $A \triangle B$ равномощно $A$?

**3.** Установите взаимно однозначное соответствие между окружностью единичного радиуса и множеством действительных чисел $\mathbb{R}$.

**4.** Действительное число называется алгебраическим, если оно является корнем многочлена с целыми коэффициентами. Докажите, что множество алгебраических чисел счетно.

**5.** Докажите, что любое множество непересекающихся интервалов на прямой конечно или счётно.

**6.** Докажите, что всякое бесконечное множество содержит бесконечное число непересекающихся счетных подмножеств.

**7.** Установите взаимно однозначное соответствие между квадратом (с внутренностью) и кругом.

**8.** Докажите, что функция $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, которая задана правилами $f(2k) = 0$, $f(2k+1) = 1$, не представляется в виде суммы двух биекций.

**9*.** Разбейте единичный круг (с границей) на непересекающиеся отрезки ненулевой длины.