Дискретная математика **Основной поток**

Занятие 7. Алгоритм Евклида и основная теорема арифметики

1. Найдите количество решений сравнения $39x \equiv 104 \pmod{221}$.

2. Найдите решения уравнения $45x - 37y = 25$ в целых числах.

3. Сколько положительных делителей имеет число $2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5^3$?

4. Пусть НОД$(a, b) = 1$. Найдите все возможные значения НОД$(a + b, a^2 + b^2)$.

5. Найдите остаток при делении числа $\underbrace{111\ldots111}_{105 \text{ цифр}}$ на 107. (Использована десятичная система.)

6. Существует ли решение уравнения $6x + 10y + 15z = 29$

а) в целых числах?

б) в неотрицательных целых числах?

7. Докажите, что для положительных x, y, z выполняются равенства

а) $\text{НОК}(x, y) = \dfrac{xy}{\text{НОД}(x, y)}$;

б) $\text{НОК}(x, y, z) = \dfrac{xyz \cdot \text{НОД}(x, y, z)}{\text{НОД}(x, y) \cdot \text{НОД}(x, z) \cdot \text{НОД}(y, z)}$;

в) попробуйте выразить НОК$(x_1, \ldots, x_n)$ аналогичным образом.

8. а) Верно ли, что для всякого n существует такая арифметическая прогрессия $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, что числа $a_1, \ldots, a_n$ попарно взаимно просты?

б) Верно ли, что существует такая арифметическая прогрессия $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, что для всякого n числа $a_1, \ldots, a_n$ попарно взаимно просты?

Дискретная математика **Основной поток**

Домашнее задание 7

1. Докажите, что если НОД(a, b) = НОД$(a, c) = 1$, то НОД$(a, bc) = 1$.

2. Найдите вычет, обратный к 74 по модулю 47.

3. Существует ли решение уравнения $31x + 75y = 2345$ в неотрицательных целых числах?

4. Докажите, что дробь $\dfrac{n^2 - n + 1}{n^2 + 1}$ несократима при всех положительных целых n.

5. Найдите самое большое возможное значение НОД(a, b), если известно, что $ab = 12!$.

6. Найдите НОД$(3^{168} - 1, 3^{140} - 1)$.

7. Решите сравнение $x^3 \equiv x \pmod{125}$. (Решить сравнение по модулю q — найти все вычеты по модулю q, которые обращают данное сравнение в истинное.)

8. Докажите, что числитель несократимой дроби, равной $\dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \dots + \dfrac{1}{p-1}$, делится на p для любого простого $p > 2$.