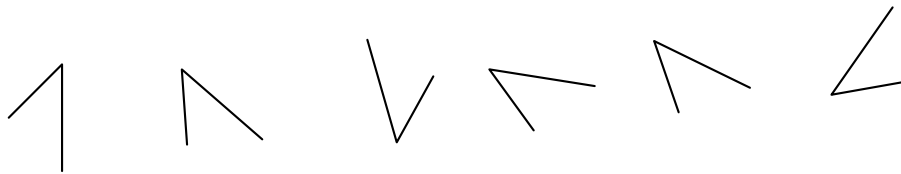


## Занятие 7. Мощность множеств-2

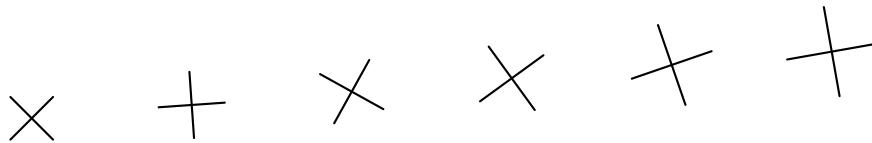
1. Докажите, что множество бесконечных последовательностей натуральных чисел равномощно  $\mathbb{R}$ .
2. Верно ли, что множество прямых на плоскости имеет мощность континуум?
3. Докажите, что множество  $\mathbb{R}^k$  равномощно  $\mathbb{R}$ .
4. Докажите, что множество бесконечных последовательностей действительных чисел равномощно  $\mathbb{R}$ .
5. Счётно ли множество бесконечных двоичных последовательностей  $b_0, b_1, \dots, b_n, \dots$ , в которых
  - а) каждый отрезок чётной длины  $b_i, b_{i+1}, \dots, b_{i+2k-1}$  содержит поровну нулей и единиц?
  - б) каждый отрезок нечётной длины  $b_i, b_{i+1}, \dots, b_{i+2k}$  содержит почти поровну нулей и единиц (модуль разности равен 1)?
6. Докажите, что множество непересекающихся восьмёрок на плоскости конечно или счётно. (Восьмёрка — это объединение двух касающихся внешним образом окружностей.)
7. Существует ли континуальное семейство непересекающихся континуальных подмножеств  $\mathbb{R}$ ?
8. Верно ли, что множество функций  $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  имеет мощность континуум?
9. Докажите, что отношений эквивалентности на множестве натуральных чисел континуум.
10. Верно ли, что отношений эквивалентности на множестве натуральных чисел, в которых каждый класс эквивалентности конечен, тоже континуум?
11. Докажите, что множество непрерывных функций  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  имеет мощность континуум.
12. Существует ли такое семейство подмножеств натуральных чисел, что (а) пересечение любых двух различных множеств в этом семействе конечно; (б) мощность семейства — континуум?
13. Существует ли такое семейство подмножеств натуральных чисел, что (а) среди любых двух множеств в этом семействе одно вложено в другое; (б) мощность семейства — континуум?

## Домашнее задание 7

1. Пусть  $A$  – точка на плоскости. Рассмотрим множество всех окружностей с центром в  $A$ . Верно ли, что это множество имеет мощность континуум?
2. Докажите, что множество интервалов на прямой имеет мощность континуум.
3. Рассмотрим бесконечные последовательности из 0, 1 и 2, в которых никакая цифра не встречается два раза подряд. Какова мощность множества таких последовательностей?
4. Верно ли, что множество бесконечных двоичных последовательностей, в которых нет трёх 1 подряд, имеет мощность континуум?
5. Верно ли, что множество сходящихся к 0 бесконечных последовательностей рациональных чисел имеет мощность континуум?
6. Докажите, что множество биекций  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  имеет мощность континуум.
7. Можно ли расположить на плоскости континуум непересекающихся равных единиц? (Единицами называются фигуры, изображенные на рисунке, то есть пары отрезков с общим концом.)



8. Крестом называется фигура, состоящая из двух диагоналей квадрата (см. рисунок). Можно ли расположить на плоскости континуум непересекающихся крестов (не обязательно одинакового размера)?



9. Верно ли, что если  $A \cup B$  континуально, то  $A$  или  $B$  континуально?