

1. Докажите, что нет такого графа на 77 вершинах, что степень каждой вершины равна 15.
2. Докажите, что в любом графе $\sum_{v \in V} d(v) = 2E$, где $d(v)$ — степень вершины, а E — количество рёбер.
3. Докажите, что во всяком графе, в котором есть хотя бы две вершины, найдутся две вершины одинаковой степени.
4. Докажите, что не существует графа с пятью вершинами, степени которых равны 4, 4, 4, 4, 2.
5. Докажите, что не существует такого орграфа на 5 вершинах, что выходные степени трёх вершин равны 3, а двух вершин равны 0, и входные степени трёх вершин равны 3, а двух вершин равны 0.
6. 50 команд сыграли турнир по волейболу в один круг. Говорят, что команда A сильнее B , если A выиграла у B или есть команда C , такая, что A выиграла у C , а C выиграла у B . Доказать, что команда, набравшая наибольшее число очков, сильнее любой другой.
7. Булевым кубом Q_n назовём граф, вершины которого — двоичные слова длины n , а рёбра связывают вершины, которые различаются только в одной позиции (пример: 00101 и 01101).

Докажите, что Q_n — двудольный.

8. а) Сколько индуцированных подграфов на 5 вершинах имеет граф K_5 ?
- б) Сколько подграфов имеет на 5 вершинах имеет граф K_5 ?
9. Сколько независимых множеств размера 7 есть в цикле C_{16} ?
10. Верно ли, что в булевом кубе Q_4 есть ровно 16 независимых множеств размера 7?
11. Докажите, что S — вершинное покрытие тогда и только тогда, когда $V \setminus S$ — независимое множество.
12. Найдите все графы, для которых есть правильная раскраска в 1 цвет.
13. Докажите, что цикл C_5 нельзя правильно раскрасить в два цвета.
14. Докажите, что граф можно правильно раскрасить в 2 цвета тогда и только тогда, когда в нём нет циклов нечётной длины.
15. Можно ли правильно раскрасить в 3 цвета вершины графов, изображённых на рисунке?

