Дискретная математика **Основной поток**

Занятие 8. Множества и булевы функции

1. Множество F состоит из графов, в которых ровно 4 ребра; множество T состоит из деревьев; а множество V состоит из графов, в которых 6 вершин. Выполняется ли равенство

$$(T \setminus F) \cap V = T \cap V \cap F?$$

2. Докажите, что для любых множеств A, B, C выполняются равенства

а) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;

б) $B \cup (A \setminus B) = A \cup B$;

в) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$;

г) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

3. Докажите включение

$$(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \triangle (B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2) \cup \cdots \cup (A_n \triangle B_n)$$

для любых множеств A_i, B_i.

4. Докажите равенство

$$(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n) \setminus (B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n) = (A_1 \setminus B_1) \cap (A_2 \setminus B_2) \cap \cdots \cap (A_n \setminus B_n)$$

для любых множеств A_i, B_i.

5. Выразите в виде ДНФ булевы функции

а) $(x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_4) \wedge \cdots \wedge (x_1 \vee x_9)$; **б)** $\bigwedge\limits_{1 \leqslant i < j < k \leqslant 5} (x_i \vee x_j \vee x_k) \wedge (\bar{x}_i \vee \bar{x}_j \vee \bar{x}_k)$

6. Булева функция $\mathrm{MAJ}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ равна тому значению, которое принимает большинство переменных (если мнения разделились поровну, $\mathrm{MAJ} = 0$). Докажите, что эту функцию можно представить в виде ДНФ, в которую не входят отрицания переменных.

7. Префикс слова $a_1 a_2 \ldots a_n$ — это любое слово вида $a_1 a_2 \ldots a_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Суффикс слова $a_1 a_2 \ldots a_n$ — это любое слово вида $a_k a_{k+1} \ldots a_n$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Подслово слова $a_1 a_2 \ldots a_n$ — это любое слово вида $a_j a_{j+1} \ldots a_k$, $1 \leqslant j \leqslant k \leqslant n$. Найдите количество двоичных слов длины n, у которых

а) множество суффиксов равно множеству префиксов;

б) множество суффиксов содержится в множестве префиксов;

в) множество суффиксов равно множеству подслов.

Дискретная математика **Основной поток**

Домашнее задание 8

Напоминаем, что ответы на вопросы должны быть обоснованы.

1. Верно ли, что для любых множеств A и B выполняется равенство $(A \setminus B) \cap ((A \cup B) \setminus (A \cap B)) = A \setminus B$?

2. Верно ли, что для любых множеств A, B и C выполняется равенство

$$((A \setminus B) \cup (A \setminus C)) \cap (A \setminus (B \cap C)) = A \setminus (B \cup C)?$$

3. Верно ли, что для любых множеств A, B и C выполняется равенство $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$?

4. Верно ли, что для любых множеств A, B и C выполняется включение $(A \cup B) \setminus (A \setminus B) \subseteq B$?

5. Про множества A, B, X, Y известно, что $A \cap X = B \cap X$, $A \cup Y = B \cup Y$. Верно ли, что тогда выполняется равенство $A \cup (Y \setminus X) = B \cup (Y \setminus X)$?

6. Пусть $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq \dots$ — невозрастающая последовательность множеств. Известно, что $A_1 \setminus A_4 = A_6 \setminus A_9$. Докажите, что $A_2 \setminus A_7 = A_3 \setminus A_8$.

7. Пусть A, B, C, D — такие отрезки прямой, что $A \triangle B = C \triangle D$ (симметрические разности равны). Верно ли, что выполняется включение $A \cap B \subseteq C$?

8. Множество X_k состоит из целых чисел, которые делятся на k. Множество S состоит из квадратов, то есть целых чисел вида k^2, где k — целое. Выполняется ли равенство

$$S \cap (X_3 \setminus X_9) = S \cap (X_6 \setminus X_4)?$$

9. Запишите ДНФ, которая равна булевой функции

$$(x_1 \vee x_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_2 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_3 \vee x_5) \wedge \dots \wedge (\bar{x}_7 \vee x_9).$$