

1. Докажите, что граф или его дополнение связны (возможно оба связны).
2. Какое максимальное число рёбер может быть в несвязном графе с  $n$  вершинами?
3. Докажите, что если в дереве есть хотя бы две вершины, то в нём есть по крайней мере две вершины степени 1.
4. Существует ли дерево на 9 вершинах, в котором 2 вершины имеют степень 5?
5. Докажите, что в дереве на  $2n$  вершинах можно выбрать  $n$  вершин, между которыми нет ни одного ребра.
6. Пусть в дереве  $k$  листьев и нет вершин степени 2. Докажите, что количество вершин дерева меньше  $2k$ .
7. Докажите, что в любом связном графе есть вершина, после удаления которой вместе со всеми примыкающими к ней рёбрами граф остаётся связным.
8. Обозначим через  $d(u, v)$  длину кратчайшего пути с концами в вершинах  $u$  и  $v$ . Это число называется *расстоянием* между вершинами на графе. Докажите неравенство треугольника

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

для расстояния на графе.

9. Найдите диаметр полного бинарного дерева глубины  $n$ .
10. **а)** Докажите, что диаметр булева куба  $Q_n$  равен  $n$ . **б)** Есть ли в булевом кубе  $Q_n$  связный подграф диаметра  $2^n - 1$ ?
11. Имеется группа островов, соединённых мостами так, что от каждого острова можно добраться до любого другого. Турист обошёл все острова, пройдя по каждому мосту ровно один раз. На острове Троекратном он побывал трижды. Сколько мостов ведёт с Троекратного, если турист **а)** не с него начал и не на нем закончил? **б)** с него начал, но не на нем закончил? **в)** с него начал и на нем закончил?
- 12\*. Докажите, что количество остовных деревьев в полном графе  $K_n$  равно  $n^{n-2}$  при  $n \geq 2$ .