Занятие 9. Функции

1. Функция g из множества положительных целых чисел в множество положительных целых чисел сопоставляет числу x наибольший простой делитель x.

а) Какова область определения g?

б) Верно ли, что если X — конечное, то и $g^{-1}(X)$ конечное?

2. Сравните множества:

а) $(\cup_{i \in I} A_i) \times (\cup_{j \in J} B_j)$ и $\cup_{i \in I, j \in J} (A_i \times B_j)$; **б)** $(\cap_{i \in I} A_i) \times (\cap_{j \in J} B_j)$ и $\cap_{i \in I, j \in J} (A_i \times B_j)$.

3. Пусть f — функция из множества A в множество B, $X, Y \subseteq A$, $U, V \subseteq B$. Верны ли для любых множеств f, A, B, X, Y, U, V следующие утверждения

а) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$;

б) из равенства $f(X) = f(Y)$ следует $X \cap Y \neq \varnothing$;

в) $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$;

г) из равенства $f^{-1}(U) = f^{-1}(V)$ следует $U = V$.

4. Функция f определена на множестве X и принимает значения в множестве Y, при этом $B \subseteq Y$. Какой знак сравнения можно поставить вместо ?, чтобы утверждение $f(f^{-1}(B))$? B стало верным?

5. Постройте биекцию между конечными подмножествами множества положительных целых чисел и конечными строго возрастающими последовательностями положительных целых чисел.

6. Приведите пример сюръекции множества положительных целых чисел на себя, для которой прообраз любого 1-элементного множества бесконечен.

7. Решите систему сравнений

$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{13}, \\ x \equiv 4 \pmod{14}, \\ x \equiv 5 \pmod{15}. \end{cases}$$

Дискретная математика **Основной поток**

Домашнее задание 9

Напоминаем, что ответы на вопросы должны быть обоснованы.

1. Функция f из множества целых чисел в множество целых чисел сопоставляет числу x наименьшее простое число, которое больше x^2. Докажите, что если множество целых чисел X конечное, то и полный прообраз этого множества $f^{-1}(X)$ конечен.

2. Пусть G — неориентированный граф без петель и кратных рёбер. Функция h_G сопоставляет каждому простому пути в этом графе длину этого пути. Приведите пример такого графа на $2n \geqslant 4$ вершинах, для которого $h^{-1}(\{n, n+1, \ldots, 2n\}) = \varnothing$, а $h^{-1}(\{n-1\}) \neq \varnothing$.

3. Приведите пример таких множеств $A_1 \neq A_2$, $B_1 \neq B_2$, что $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) = (A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2)$.

4. Пусть f — функция из множества X в множество Y, при этом $A \subseteq X$. Какой знак сравнения можно поставить вместо ?, чтобы утверждение

$$f^{-1}(f(A)) \ ? \ A$$

стало верным? (Возможные знаки сравнения в этой и двух следующих задачах: $\subseteq$, $\supseteq$, $=$. Нужно учесть все варианты.)

5. Пусть f — функция из множества $A \cup B$ в множество Y. Какой знак сравнения можно поставить вместо ?, чтобы утверждение

$$f(A \setminus B) \ ? \ f(A) \setminus f(B)$$

стало верным?

6. Пусть f — функция из множества X в множество Y, при этом $A \cup B \subseteq Y$. Какой знак сравнения можно поставить вместо ?, чтобы утверждение

$$f^{-1}(A \setminus B) \ ? \ f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$$

стало верным?

7. Про функцию f из множества X в множество Y и множество $B \subseteq Y$ известно, что $f^{-1}(B) = X$. Верно ли, что $B = Y$?

8. Приведите пример такой инъекции f из множества X в множество Y, что для некоторого $B \subseteq Y$ выполняются оба условия

$$\begin{cases} B \neq \varnothing, \\ f^{-1}(B) = \varnothing. \end{cases}$$

9. Решите систему сравнений

$$\begin{cases} x \equiv -1 \pmod{29}, \\ x \equiv 1 \pmod{31}, \end{cases}$$

используя решение линейного диофантова уравнения.