**Занятие 10. Композиции функций. Формула включений и исключений**

**1.** Верно ли, что

**а)** композиция $f \circ g$ инъекции $f$ и инъекции $g$ является инъекцией?

**б)** композиция $f \circ g$ сюръекции $f$ и сюръекции $g$ является сюръекцией?

**в)** композиция $f \circ g$ сюръекции $f$ и инъекции $g$ является сюръекцией?

**г)** композиция $f \circ g$ инъекции $f$ и сюръекции $g$ является инъекцией?

**2.** Функции в этой задаче предполагаются всюду определенными. Говорят, что $g\colon B \to A$ является *левой обратной* (соответственно *правой обратной*) к $f$, если $g \circ f = \mathrm{id}_A$ (соответственно $f \circ g = \mathrm{id}_B$).

**а)** Приведите примеры, когда левая обратная не является правой обратной и когда правая обратная не является левой.

**б)** Может ли такое случиться для конечных множеств?

**в)** Может ли быть так, что у одной функции есть и левая, и правая обратные, но они различны?

**г)** Для каких функций существует левая обратная?

**д)** Для каких функций существует правая обратная?

**3.** Чего больше: инъективных отображений 10-элементного множества в 20-элементное или сюръективных отображений 20-элементного множества в 10-элементное?

**4.** Пусть $f$ — инъективное отображение 10-элементного множества $A$ в 12-элементное множество $B$. Сколько есть таких функций $g$ (не обязательно всюду определенных) из множества $B$ в множество $A$, что $g \circ f = \mathrm{id}_A$?

**5.** $A_1$, $A_2$, $A_3$ — подмножества конечного множества $X$. Известно, что

$$\begin{array}{llll} |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 12, & |A_1| = 8, & |A_2| = 4, & |A_3| = 4, \\ |A_1 \cap A_2| = 2, & |A_2 \cap A_3| = 1, & & |A_1 \cap A_3| = 3. \end{array}$$

Верно ли, что $A_2 \cap A_3 \subseteq A_1$?

**6.** $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ — подмножества конечного множества $X$. Известно, что в каждом из этих множеств 15 элементов; в пересечении любой пары этих множеств 6 элементов; в пересечении любой тройки — 2 элемента. Каково наименьшее количество элементов в множестве $X$?

**7.** Сколько неотрицательных целочисленных решений уравнения $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$ удовлетворяют неравенствам $x_i \leqslant 3$?

**Дискретная математика** **Основной поток**

**Домашнее задание 10**

Напоминаем, что ответы на вопросы должны быть обоснованы.

**1.** О всюду определенных функциях $f$, $g$ из множества $A$ в себя известно, что $f \circ g \circ f = \mathrm{id}_A$. Верно ли, что $f$ — биекция? (Множество $A$ не обязательно конечное.)

**2.** О функциях $f$ из множества $A$ в множество $B$ и $g$ из множества $B$ в множество $A$ (не обязательно всюду определенных) известно, что $g \circ f = \mathrm{id}_A$. Верно ли, что $g$ всюду определена? (Множество $A$ не обязательно конечное.)

**3.** О функциях $f, g$ из множества $A$ в себя (не обязательно всюду определенных) известно, что $g \circ f$ нигде не определена. Множество $A$ состоит из 11 элементов. Найдите максимально возможное количество элементов в образе $f \circ g(A)$.

**4.** Функция $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ — множество неотрицательных целых чисел) сопоставляет паре $(x, y)$ число $2^x(2y + 1)$. Существует ли такая функция $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, что $f \circ g(n) = n^2$?

**5.** Найдите количество таких всюду определенных функций $f$ из 7-элементного множества $A$ в себя, что $f \circ f = \mathrm{id}_A$.

**6.** Найдите количество целых положительных трехзначных чисел, которые не делятся ни на 3, ни на 5, ни на 7.

**7.** Сколько подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, 12\}$ имеют пустое пересечение хотя бы с одним из множеств $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$, $\{1, 4, 7, 10\}$, $\{1, 5, 9\}$?