Дискретная математика **Пилотный поток**

Занятие 10. Графы-2

1. Найдите наибольшее целое положительное число, в котором все цифры разные, а любые две подряд идущие цифры образуют двузначное число, делящееся на 7.

2. Известно, что в ориентированном графе на $\geqslant 2$ вершинах из любой вершины в любую другую идёт ровно один простой путь. Верно ли, что выходные (они же исходящие) степени вершин в этом графе равны 1?

3. а) Докажите, что любое дерево 2-раскрашиваемо (существует правильная раскраска в 2 цвета).

б) Сколько есть правильных 2-раскрасок у дерева?

4. Докажите, что в дереве на $2n$ вершинах можно выбрать n вершин так, что ни одна пара выбранных вершин не соединена ребром (такие множества вершин называются *независимыми*).

5. Имеется связный граф. Докажите, что в нём можно выбрать одну из вершин так, чтобы после её удаления вместе со всеми ведущими из неё рёбрами останется связный граф.

6. а) Докажите, что есть такое двоичное слово, в котором любая комбинация из 10 нулей и единиц встречается ровно один раз.

б) Пусть двоичное слово удовлетворяет условию предыдущего пункта и начинается на 0100011101. Найдите последние 8 цифр этого слова.

7. Найдите максимальное количество простых путей с заданными концами в ориентированном ациклическом графе на n вершинах.

8. Докажите, что в ориентированном графе G нет пути из вершины s в вершину t тогда и только тогда, когда вершины графа можно разбить на два непересекающихся множества S и T, таких что $s \in S$, $t \in T$ и в графе нет ребер из вершин из множества S в вершины из множества T.

9. Граф получен из цикла на $2n$ вершинах добавлением рёбер, соединяющих противоположные вершины.

а) При каких n этот граф 2-раскрашиваемый?

б) При каких n вершины этого графа можно правильно раскрасить в 3 цвета?

10. Докажите, что S — вершинное покрытие в неориентированном графе $G = (V, E)$ тогда и только тогда, когда $V \setminus S$ — независимое множество.

Дискретная математика **Пилотный поток**

Домашнее задание 10

1. Последовательность чисел определена рекуррентно: $a_0 = 5$; $a_{n+1} = a_n^2 + 3$. Найдите последнюю цифру числа a_{2015}.

2. Сколько существует правильных раскрасок графа–пути длины n (вершин в этом графе $n+1$) в красный, синий и зелёный цвета?

3. Известно, что в неориентированном графе существует путь, проходящий по каждому ребру ровно два раза. Верно ли, что в графе есть эйлеров цикл?

4. Есть ли в булевом кубе путь, проходящий по каждой вершине ровно один раз?

5. Выходная (она же исходящая) степень каждой вершины в ориентированном графе на n вершинах равна $n-2$. Какое количество компонент сильной связности может быть в этом графе? Укажите все возможные значения.

6. Пусть в ориентированном графе для любой пары вершин u, v есть либо ребро (u, v), либо ребро (v, u) (ровно одно из двух). Докажите, что в таком графе есть простой путь, включающий в себя все вершины.

7. Назовем не 2-раскрашиваемый граф минимальным, если после удаления любого ребра он становится 2-раскрашиваемым. Докажите, что в минимальном не 2-раскрашиваемом графе на 1000 вершинах есть хотя бы одна изолированная вершина (т.е. вершина степени 0).

8. На столе по кругу расставлено несколько коробочек, в каждой лежит по несколько камушков. За один ход разрешается взять все камушки из одной коробочки и разложить их, двигаясь по часовой стрелке, начиная со следующей коробочки, кладя в каждую коробочку по одному камушку. На каждом следующем ходу камушки берутся из той, коробочки, в которую попал последний камушек на предыдущем ходу. Можно ли утверждать, что рано или поздно повторится начальное расположение камушков?