

1. Каждый элемент n -элементного множества с вероятностью p независимо от других включается в множество S_p . Найдите математическое ожидание числа элементов в множестве S_p .
2. а) Выбирается случайное подмножество двоичных строк длины n . (Все подмножества равновероятны.) Найдите математическое ожидание суммарного числа единиц в строках этого подмножества.
б) Тот же вопрос, но выбирается случайное подмножество, в котором ровно k строк.
3. Подбрасывается «честная» монета вплоть до выпадения первого орла. Найдите математическое ожидание количества бросков.
4. Студент за выполнение домашней работы получает оценку от 1 до 10. Средняя оценка за серию домашних работ оказалась равной 6. Докажите, что доля работ, оценка за которые меньше 4, не превосходит $4/7$.
5. Докажите, что для любой случайной величины X выполняется неравенство $E[X^2] \geq (E[X])^2$.
6. Постройте алгоритм, который находит в графе разрез размера не меньше $|E|/2$ за время, ограниченное полиномом от числа вершин графа.
7. Докажите, что если в графе $G = (V, E)$ число вершин $|V| = 2n + 1$ нечётно, то в этом графе есть разрез размера не меньше $\frac{|E|(n+1)}{2n+1}$.
8. Пусть G — регулярный граф на n вершинах (степени всех вершин d). Возьмём случайный маршрут длины N (все маршруты равновозможны). Для каждого ребра графа найдите вероятность события «на k -м шаге маршрут проходит через ребро e ».
9. Выбирается случайная пара n^2 -элементных подмножеств n^3 -элементного множества (каждая пара равновозможна). Докажите, что вероятность того, что эти множества не пересекаются, стремится к 0 при $n \rightarrow \infty$.
10. Пусть f — случайная тотальная функция из n -элементного множества в $100n$ -элементное.
а) Докажите, что
$$\Pr[f \text{ инъективная}] \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

б)* Докажите, что
$$\Pr[|\operatorname{Im} f| < 0.95n] \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$
11. Найдите размер максимальной антицепи в покоординатном порядке на множестве $\{0, 1\}^n$. Другими словами, нужно найти максимальное количество подмножеств n -элементного множества, ни одно из которых не содержится в другом.