Дискретная математика **Основной поток**

Занятие 12. Условные вероятности и независимые события

Напоминание. Любому вычислению вероятностей должен предшествовать выбор вероятностной модели (множество исходов, вероятности исходов).

1. Десять учеников сдают экзамен по десяти билетам. Ученики по очереди заходят в кабинет и вытягивают случайный билет из оставшихся (в частности, последний берет единственный оставшийся билет). Вася выучил только один билет. Какова вероятность, что Васе достанется билет, который он знает, если

а) Вася тянет билет первым;

б) Вася тянет билет последним?

2. Приведите примеры, в которых условная вероятность $\Pr[A \mid B]$ больше вероятности $\Pr[A]$, меньше её, а также равна ей.

3. Четыре человека А, Б, В, Г становятся в очередь в случайном порядке (все варианты равновозможны). Найдите **а)** условную вероятность того, что А первый, если Б последний; **б)** условную вероятность того, что А первый, если А не последний; **в)** условную вероятность того, что А первый, если Б не последний; **г)** условную вероятность того, что А первый, если Б стоит в очереди позже А; **д)** условную вероятность того, что А стоит в очереди раньше Б, если известно, что А раньше В.

4. Есть три внешне одинаковых мешочка. В одном лежит две золотых монеты, во втором — одна золотая и одна серебряная монета, в третьем — две серебряные.

Вы выбрали случайно и равновозможно один из мешочков и наугад достали из него монету. Она оказалась золотой. Какова вероятность, что и вторая монета в выбранном мешочке золотая?

5. Есть девять коробок и один шарик. Случайно и равновозможно выбирается коробка. Затем с вероятностью $1/2$ в неё кладётся шарик, а с вероятностью $1/2$ — нет. Найдите вероятность того, что в последней коробке шарик есть при условии, что в остальных коробках его нет.

6. Выбирается случайная перестановка $x_1, x_2, \ldots, x_{49}$ чисел от 1 до 49 (все перестановки равновозможны). Независимы ли события

а) «$x_{24} > x_{25}$» и «$x_{25} > x_{26}$»?

б) «x_{24} больше всех последующих» и «x_{25} больше всех последующих»?

7. Пусть события A и B независимы, и вероятность события $\overline{B}$ положительна. Докажите, что события A и $\overline{B}$ независимы.

8. Пусть A и B — события положительной вероятности, отличной от 1. Докажите, что по любым трём из величин $\Pr[A \mid B]$, $\Pr[A \mid \bar{B}]$, $\Pr[B]$, $\Pr[B \mid A]$ можно найти четвёртую.

Дискретная математика **Основной поток**

Домашнее задание 12

Напоминаем, что ответы на вопросы должны быть обоснованы.

Напоминание. Любому вычислению вероятностей должен предшествовать выбор вероятностной модели (множество исходов, вероятности исходов).

1. Какова вероятность того, что случайно взятое число от 1 до 100 делится на 2, при условии, что оно делится на 3?

2. В розыгрыше лото случайно выбираются 5 чисел из множества $\{1, 2 \ldots, 36\}$. Независимы ли события «среди выбранных чисел есть 2» и «среди выбранных чисел есть 3»?

3. Случайно выбирается всюду определенная функция $f\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$. Независимы ли события «f инъективна» и «$f(1) = 1$»?

4. Система блокировки контента с вероятностью 99% правильно определяет вредный файл (ошибка двусторонняя: вредный файл блокируется с вероятностью 99%, а полезный — с вероятностью 1%).

Известно, что доля вредных файлов 10^{-3}. Найдите отношение вероятностей событий «заблокирован полезный файл» и «заблокирован вредный файл» при условии, что файл заблокирован (то есть признан вредным).

5. Жюри из трех человек нужно принять одно из двух возможных решений, одно из которых правильное. Два члена жюри независимо друг от друга принимают правильное решение с вероятностью p, а третий случайно выбирает одно из двух возможных решений с равными вероятностями. Окончательное решение жюри выносится большинством голосов. Какова вероятность, что жюри примет правильное решение? (Сравните ее с вероятностью p правильного решения, принимаемого одним добросовестным членом жюри.)

6. Король предлагает узнику разложить десять белых и десять чёрных шаров по двум одинаковым коробкам (надо использовать все шары; в каждой коробке должен быть хотя бы один шар). После этого сначала король выбирает случайно одну из коробок, каждую с вероятностью $1/2$, а затем из выбранной коробки выбирает случайный шар, все с равными вероятностями. Если шар чёрный, то узника казнят, если белый — отпускают. Как нужно разложить шары, чтобы вероятность выжить была максимальной?

7. Двое игроков играют матч из 20 партий; выигрывает тот, кто первым наберёт 10 очков (за победу даётся одно очко, за проигрыш ноль, ничьих не бывает). Считая все варианты (любые комбинации из двадцати выигрышей и проигрышей) равновероятными, найдите вероятность того, что первый игрок выиграет матч, если после 15 игр счёт был $8 : 7$ в его пользу.

8. Двое играют в бой яиц. Перед ними стоит корзина с яйцами. Они наугад берут по яйцу и ударяют их носами. Разбитое яйцо выбрасывается и побеждённый берёт новое, а победитель раунда сохраняет своё яйцо для следующего раунда (предполагается, что победившее яйцо сохранило свою прочность и что исход каждого раунда зависит только от относительного качества яиц). Какова вероятность победы в $(n+1)$-м раунде после победы во всех предыдущих?