

1. Известно, что a, b, c, d — положительные целые числа, $ab = cd$ и a делится на c . Докажите, что d делится на b .
2. При делении некоторого числа m на 13 и 15 получили одинаковые частные, но первое деление было с остатком 8, а второе без остатка. Найдите число m .
3. Какой остаток даёт число 100^{100} при делении на 99?
4. а) Докажите, что число $a^3 - a$ делится на 3 при любом целом a . б) Пусть p — простое число, большее 3. Докажите, что $p^2 - 1$ делится на 24.
5. Докажите, что если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то $ac \equiv bd \pmod{m}$.
6. Найдите наибольший общий делитель 238 и 39.
7. Найдите решения уравнения $45x - 37y = 25$ в целых числах.
8. Сколько положительных делителей имеет число $2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5^3$?
9. Докажите, что $(p - 1)!$ даёт остаток -1 по модулю p для любого простого числа p .
10. Докажите, что для любого числа n между n и $n!$ есть простое число.
11. Пусть $\text{НОД}(a, b) = 1$. Найдите возможные значения $\text{НОД}(a + b, a^2 + b^2)$.
12. Формулы включения – исключения для НОК и НОД. Докажите, что для положительных x, y, z выполняются равенства
 - а) $\text{НОК}(x, y) = \frac{xy}{\text{НОД}(x, y)}$;
 - б) $\text{НОК}(x, y, z) = \frac{xyz \cdot \text{НОД}(x, y, z)}{\text{НОД}(x, y) \cdot \text{НОД}(x, z) \cdot \text{НОД}(y, z)}$;
 - в) попробуйте выразить $\text{НОК}(x_1, \dots, x_n)$ аналогичным образом.
13. а) Верно ли, что для всякого n существует такая арифметическая прогрессия $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, что числа a_1, \dots, a_n попарно взаимно просты?
 б) Верно ли, что существует такая арифметическая прогрессия $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, что для всякого n числа a_1, \dots, a_n попарно взаимно просты?
- 14*. Делимость биномиальных коэффициентов. В этой задаче p — некоторое простое число.
 - а) $\binom{p}{k}$ делится на p .
 - б) Разделим числа n и k на p с остатком: $n = n'p + n_0$, $k = k'p + k_0$. Тогда

$$\binom{n}{k} \equiv \binom{n'}{k'} \binom{n_0}{k_0} \pmod{p}.$$
 - в) Запишем n и k в p -ичной системе счисления: $n = n_0 + n_1p + \dots + n_dp^d$, $k = k_0 + k_1p + \dots + k_dp^d$. Биномиальный коэффициент $\binom{n}{k}$ делится на p тогда и только тогда, когда в одном из разрядов $k_i > n_i$.
 - г) Максимальная степень p , на которую делится $\binom{x+y}{y}$, равна количеству переносов при сложении столбиком чисел x, y , записанных в p -ичной системе счисления.