

- а) Какой может быть последняя цифра степени тройки в десятичной записи? б) Докажите, что предпоследняя цифра степени тройки всегда четна.
- Сформулируйте и докажите признак делимости а) на 9; б) на 11. (В десятичной системе счисления.)
- Сформулируйте и докажите признак делимости на 17 в 16-ичной системе счисления.
- Найдите остаток при делении числа $\underbrace{111 \dots 111}_{105 \text{ цифр}}$ на 107. (Использована десятичная система.)
- Докажите, что при любом целом a число $a^{73} - a$ делится на $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 73$.
- Если от некоторого трёхзначного числа отнять 6, то оно разделится на 7, если отнять 7, то оно разделится на 8, а если отнять 8, то оно разделится на 9. Найдите это число.
- Решите систему сравнений

$$x \equiv 3 \pmod{13},$$

$$x \equiv 4 \pmod{14},$$

$$x \equiv 5 \pmod{15}.$$

- Решите систему сравнений

$$x \equiv 3 \pmod{15},$$

$$x \equiv 4 \pmod{21},$$

$$x \equiv 5 \pmod{35}.$$

- Найдите остатки от деления а) 19^{10} на 66; б) 19^{14} на 70; в) 17^9 на 48; г) $14^{14^{14}}$ на 100.
- Решите уравнение а) $\varphi(x) = x/3$; б) $\varphi(x) = x/4$.
- Докажите равенство $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$ (суммирование по всем делителям числа n).
- Докажите, что в любой арифметической прогрессии $a, a + d, a + 2d, \dots, a + nd, \dots$, составленной из натуральных чисел, есть бесконечно много членов, в разложении которых на простые множители входят в точности одни и те же простые числа.