Дискретная математика **Основной поток**

Занятие 14. Повторение

1. Числа Фибоначчи определяются соотношениями $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, для $n \geqslant 3$. Докажите, что F_n четно тогда и только тогда, когда n делится на 3.

2. Сколько существует различных простых неориентированных графов на 10 вершинах $v_1, \ldots, v_{10}$ с 4 ребрами, таких, что все ребра сходятся в одной вершине (т.е. существует вершина, которая является концом всех четырех ребер графа)? Ответом должно быть число. Ответ должен быть обоснован.

3. Сколькими способами можно выбрать 5 целых чисел из отрезка $[1, 36]$ так, чтобы разность между любыми двумя из них была не меньше 8? Ответом должно быть число.

4. Существует ли трехзначное положительное целое число, которое при делении на 11 дает остаток 1, при делении на 12 дает остаток 2, а при делении на 13 дает остаток 3?

5. В графе G на множестве вершин $\{0, 1, \ldots, 66\}$ ребром соединены пары вершин x, y, для которых выполняется $13(x - y) \equiv \pm 4 \pmod{67}$. Является ли граф G связным? Обоснуйте ответ.

6. Функции $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ являются сюръекциями (напомним, что любая сюръекция всюду определена). Известно, что $g \circ f(x)$ — постоянная функция (значение не зависит от x). Найдите мощность множества C.

7. Том Сойер красит забор, состоящий из 20 досок. Покрасив очередную доску, он с вероятностью $4/5$ переходит к следующей доске, а с вероятностью $1/5$ уходит купаться (и больше забор не красит). Найдите математическое ожидание количества покрашенных досок. (Обратите внимание, что по правилам хотя бы одну доску он покрасит.)

8. Пусть в графе на $2n + 1$ вершине для всякого подмножества S из n вершин есть еще одна вершина, соединенная со всеми вершинами из S. Докажите, что в графе есть вершина, соединенная со всеми остальными вершинами.