1. Среди n камней есть один радиоактивный. Счётчиком Гейгера мы можем проверить для любой кучки камней, если ли среди них радиоактивный. За какое наименьшее количество проверок можно найти радиоактивный камень?

2. В клетках шахматной доски написали в каком-то порядке числа от 1 до 64, каждое по одному разу. Про любое множество клеток доски мы можем спросить, какие числа на них стоят, и нам выдают полный список. За какое наименьшее количество вопросов можно понять, где какие числа стоят?

3. а) Докажите, что из n монет можно одновременно найти самую тяжёлую и самую лёгкую за $\frac{3}{2}n+O(1)$ взвешиваний. **б)** Докажите, что быстрее этого сделать нельзя.

4. Вычисление булевой функции $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ в модели разрешающих деревьев происходит следующим образом: за один вопрос разрешается спросить значение одной из переменных, в конце нужно объявить значение функции. Сложность вычисления функции — наименьшее количество вопросов в адаптивном (вопрос может зависеть от предыдущих ответов) протоколе, вычисляющем функцию.

а) Найдите сложность вычисления дизъюнкции $\bigvee_i x_i$ в модели разрешающих деревьев.

б) Пусть $n = k + 2^k$, а функция $f(x_1, \dots, x_k, y_0, \dots, y_{2^k-1})$ равна y_x, где x — число, двоичная запись которого $x_1 \dots x_k$. Докажите, что сложность вычисления f в модели разрешающих деревьев не превосходит $k+1$.

в) Докажите, что сложность вычисления функции f из предыдущего пункта не меньше $k+1$.

г) Докажите, что неадаптивный протокол, вычисляющий функцию f (список вопросов составляется заранее, до получения ответов), содержит не менее n вопросов.

5*. Пусть противник загадал число от 1 до n, и мы можем задавать ему вопросы вида «меньше ли задуманное число данного конкретного числа». При этом противник может соврать, но противнику разрешается соврать в 1% случаев (мы должны заранее сообщить, сколько зададим вопросов, чтобы противник мог сосчитать 1% от этого числа). Докажите, что можно узнать загаданное число за $O(\log n)$ вопросов.