

## Занятие 15. Числа-2

1. Сформулируйте и докажите признак делимости **а)** на 9; **б)** на 11. (В десятичной системе счисления.)
2. Сформулируйте и докажите признак делимости на 17 в 16-ичной системе счисления.
3. Найдите остаток при делении числа  $\underbrace{111 \dots 111}_{105 \text{ цифр}}$  на 107. (Использована десятичная система.)
4. Докажите, что при любом целом  $a$  число  $a^{73} - a$  делится на  $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 73$ .
5. Если от некоторого трёхзначного числа отнять 6, то оно разделится на 7, если отнять 7, то оно разделится на 8, а если отнять 8, то оно разделится на 9. Найдите это число.
6. Решите систему сравнений

$$x \equiv 3 \pmod{13},$$

$$x \equiv 4 \pmod{14},$$

$$x \equiv 5 \pmod{15}.$$

7. Решите систему сравнений

$$x \equiv 3 \pmod{15},$$

$$x \equiv 4 \pmod{21},$$

$$x \equiv 5 \pmod{35}.$$

8. Найдите остатки от деления **а)**  $19^{10}$  на 66; **б)**  $19^{14}$  на 70; **в)**  $17^9$  на 48; **г)**  $14^{14^{14}}$  на 100.
9. Решите уравнение **а)**  $\varphi(x) = x/3$ ; **б)**  $\varphi(x) = x/4$ .
10. Докажите равенство  $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$  (суммирование по всем делителям числа  $n$ ).
11. Докажите, что в любой арифметической прогрессии  $a, a + d, a + 2d, \dots, a + nd, \dots$ , составленной из натуральных чисел, есть бесконечно много членов, в разложении которых на простые множители входят в точности одни и те же простые числа.

## Домашнее задание 14

1. Докажите, что при любом нечетном  $n$  число  $2^{n!} - 1$  делится на  $n$ .
2. Найдите остаток от деления  $8^{8^8}$  на 13.
3. Докажите, что число  $x + 10y$  делится на 13 тогда и только тогда, когда число  $y + 4x$  делится на 13.
4. Решите сравнение  $74x \equiv 1 \pmod{47}$ .
5. Найдите НОД( $3^{168} - 1, 3^{140} - 1$ ).
6. Решите сравнение  $x^2 \equiv 1 \pmod{200}$ .
7. Существует ли степень тройки, заканчивающаяся на  $\dots 0001$  в десятичной записи?
8. Докажите, что при любом  $k$  существует ровно 4 решения сравнения  $x^2 \equiv x \pmod{10^k}$ . В качестве решений рассматриваются вычеты по модулю  $10^k$ .