1. Докажите, что если A, B — разрешимые множества, то и множества $A \cup B$, $A \cap B$, $\bar{A}$ разрешимы.

2. Докажите, что если A, B — перечислимые множества, то и множества $A \cup B$, $A \cap B$ перечислимы.

3. Пусть S — это множество таких n, что десятичная запись числа e содержит по крайней мере n девяток подряд. Докажите, что множество S разрешимое. (Разрешается использовать тот факт, что e — иррациональное число.)

4. Перечислимо ли множество таких натуральных n, что уравнение $x^n + y^{n+1} = z^{n+2}$ имеет решение в положительных целых числах?

5. Всюду определенная функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ невозрастающая. Верно ли, что f вычислима?

6. Докажите, что не существует универсальной нумерации вычислимых всюду определенных функций, то есть такой всюду определенной вычислимой функции $U\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что для любой вычислимой всюду определённой функции $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ найдется такое p, что $U(p, x) = f(x)$ для всех x.

7. Пусть U — универсальная вычислимая функция. Докажите, что $U(p, p)$ не определено для некоторого p.

8. Докажите, что если существует алгоритм перечисления элементов множества S в возрастающем порядке, то это множество разрешимо.

9. (Теорема Поста) Докажите, что если A и $\bar{A}$ перечислимы, то A разрешимо.

10. Докажите, что функция

$$c\colon (x, y) \mapsto \binom{x + y + 1}{2} + y$$

является вычислимой вместе с обратной биекцией между множествами $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ и $\mathbb{N}$.

11. Постройте вычислимую вместе с обратной биекцию между $\mathbb{N}$ и множеством конечных последовательностей с элементами из $\mathbb{N}$.

12. Диофантово уравнение — это уравнение вида $P(x_1, \ldots, x_n) = 0$, где P — многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что перечислимость множества диофантовых уравнений, у которых есть целочисленные решения.

1. Вычислима ли следующая функция?

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{если существует бесконечно много пар простых чисел } p,\ p+2, \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

2. Докажите, что для любой универсальной вычислимой функции U множество $\{U(p,p) : p \in \mathbb{N}\}$ совпадает с $\mathbb{N}$.

3. Докажите, что если существует алгоритм перечисления элементов некоторого множества, то существует также и алгоритм, который перечисляет элементы множества без повторений.

4. Пусть U — универсальная вычислимая функция. Докажите, что $U(p,p^2)$ не определено для некоторого p.

5. Всюду определенная функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ строго возрастает и множество ее значений содержит все натуральные числа за исключением конечного множества. Докажите, что f вычислима.

6. Докажите, что любое бесконечное перечислимое множество содержит бесконечное разрешимое множество.

7. Докажите, что декартово произведение перечислимых множеств перечислимо.

8. Докажите, что множество рациональных чисел, меньших e, разрешимо.

9. Пусть S — разрешимое множество натуральных чисел. Множество D состоит из всех простых делителей множества S. Верно ли, что D перечислимо?