Занятие 17. Мощности. Счётные множества

1. Докажите, что множество простых чисел счётно.

2. Докажите, что множество конечных подмножеств рациональных чисел счётно.

3. Пусть множество A конечно, а множество B счётно. Докажите, что множество всюду определённых функций $f\colon A \to B$ счётно.

4. Функция называется периодической, если для некоторого числа T и любого x выполняется $f(x+T) = f(x)$. Докажите, что множество периодических функций $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ счётно.

5. Пусть A бесконечно, а B счётно. Верно ли, что множество $A \cup B$ равномощно множеству A?

6. Докажите, что если A конечно и $B \subseteq A$, то

а) B конечно;

б) $|B| \leqslant |A|$;

в) $|B| = |A| \Leftrightarrow B = A$;

г) $|B| < |A| \Leftrightarrow A \setminus B \neq \varnothing$.

7. Напомним, что натуральные числа — это целые неотрицательные числа. Постройте явные биекции между

а) множеством двоичных слов и натуральными числами;

б) парами натуральных чисел и натуральными числами;

в) конечными последовательностями натуральных чисел и натуральными числами.

Пояснение. Слово «явная» не имеет точного формального смысла. Понимать его нужно так, что биекция должна быть задана правилом, которое применимо к любому элементу области определения и для применения этого правила «нам придётся только механически следовать предписаниям, как если бы мы были роботами: от нас не потребуется ни понимания, ни искусства, ни изобретательности» (С. Клини). Такие правила в дальнейшем мы будем называть алгоритмами.

Дискретная математика **Основной поток**

Домашнее задание 16

Напоминаем, что ответы на вопросы должны быть обоснованы. Ссылка на утверждение, доказанное на лекции или приведённое в учебнике, считается обоснованием. Ссылка на утверждение задачи из классного листка обоснованием **не считается** — нужно воспроизвести рассуждение.

1. Верно ли, что если $A \setminus B$ бесконечно, а B счётно, то $A \setminus B$ равномощно A?

2. Верно ли, что если A бесконечно, а B счётно, то $A \triangle B$ равномощно A?

3. Пусть множество A бесконечно. Верно ли, что для некоторого счётного подмножества $B \subsetneq A$ существует сюръекция $f\colon A \setminus B \to A$?

4. Докажите, что любое множество непересекающихся интервалов на прямой конечно или счётно.

5. Докажите, что всякое бесконечное множество содержит бесконечное число непересекающихся счётных подмножеств.

6. Пусть $f\colon A \to B$ — такая всюду определённая функция из множества A в счётное множество B, что для любого $y \in B$ полный прообраз $f^{-1}(y)$ конечен или счётен. Докажите, что тогда A конечно или счётно.

7. Постройте явную биекцию между конечными строго возрастающими последовательностями натуральных чисел и конечными последовательностями натуральных чисел. (По определению, последовательности длины 0 и 1 являются возрастающими.)