Определение. Пусть $A \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ — множество пар натуральных чисел. Его *проекцией* Пр A назовём множество таких x, что для некоторого y пара (x, y) входит в множество A.

1. Докажите, что проекция перечислимого множества перечислима.

2. Пусть $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — вычислимая функция, множество $A \subseteq \mathbb{N}$ перечислимо. Докажите, что **а)** образ $f(A)$ перечислим; **б)** прообраз $f^{-1}(A)$ перечислим.

3. Пусть $A \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ перечислимо. Докажите, что существует вычислимая функция f, область определения которой Пр A, а график содержится в множестве A.

4. Существует ли разрешимое множество D пар натуральных чисел, универсальное для разрешимых множеств (то есть для любого разрешимого $X \subseteq \mathbb{N}$ найдётся такое p, что $X = \{x : (p, x) \in D\}$)?

5. Докажите, что бесконечное подмножество $\mathbb{N}$ разрешимо тогда и только тогда, когда оно является множеством значений всюду определённой возрастающей вычислимой функции $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

6. Найдите разрешимое множество $A \subseteq \mathbb{N}$ и вычислимую всюду определённую функцию $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такие, что образ $f(A)$ неразрешим.

7. Пусть функция f растёт быстрее любой вычислимой функции, то есть для любой вычислимой функции g найдётся такое N, что $f(x) > g(x)$ для всех $x > N$, принадлежащих области определения g. Докажите, что $f(\mathbb{N})$ неразрешимо.

8. а)* Докажите, что существует такое перечислимое множество $P \subset \mathbb{N}$, что дополнение к P бесконечно, но P пересекается с любым бесконечным перечислимым множеством. (Такое множество называется *простым*.)

б) Докажите, что простое множество неразрешимо.

1. Докажите, что непустое подмножество $\mathbb{N}$ разрешимо тогда и только тогда, когда оно является множеством значений всюду определённой неубывающей вычислимой функции $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

2. Пусть $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — всюду определённая вычислимая функция, множество $A \subseteq \mathbb{N}$ разрешимо. Докажите, что $f^{-1}(A)$ также разрешим.

3. Найдите разрешимое множество $A \subseteq \mathbb{N}$ и вычислимую функцию $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такие, что прообраз $f^{-1}(A)$ неразрешим.

4. Докажите, что во всяком бесконечном разрешимом множестве натуральных чисел есть перечислимое неразрешимое подмножество.

5. Пусть X, Y — перечислимые множества. Докажите, что найдутся такие непересекающиеся перечислимые множества $X' \subseteq X$ и $Y' \subseteq Y$, $X' \cap Y' = \varnothing$, что $X \cup Y = X' \cup Y'$.

6. Пусть S — разрешимое множество натуральных чисел. Множество D состоит из всех простых делителей множества S. Верно ли, что D разрешимо?

7. Докажите, что перечислимо множество программ, которые останавливаются хотя бы на одном входе. Более формально: пусть U — универсальная вычислимая функция, а S — множество тех p, для которых функция $U(p, x)$ определена хотя бы при одном x. Тогда S — перечислимо.