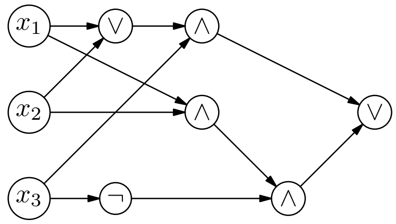
Дискретная математика **Пилотный поток**

Занятие 18. Булевы схемы

1. Найдите функцию, которую вычисляет следующая схема:



2. Булева функция сравнения $L(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n)$ равна 1 тогда и только тогда, когда $(\overline{x_1, \dots, x_n})_2 < (\overline{y_1, \dots, y_n})_2$. Постройте схему размера $O(n)$, которая вычисляет $L(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n)$.

3. Пусть $n = k+2^k$. Указательная функция $f(x_1, \dots, x_k, y_0, \dots, y_{2^k-1})$ равна y_x, где x — число, двоичная запись которого $x_1 \dots x_k$. Постройте схему полиномиального размера для указательной функции.

4. Постройте схему размера $O(n)$, которая вычисляет сумму n-битовых двоичных чисел.

5. Постройте схему размера $O(n^2)$, которая вычисляет произведение n-битовых двоичных чисел.

6. Рассмотрим вход функции $CONN\colon \{0,1\}^{\binom{n}{2}} \to \{0,1\}$ как неориентированный граф на n вершинах и положим $CONN(G) = 1$ тогда и только тогда, когда G связен. Постройте схему, которая вычисляет функцию $CONN$

а) размера $O(n^4)$;

б) размера $O(n^3 \log n)$.

7. Булева функция $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ называется монотонной, если для всяких $x, y \in \{0,1\}^n$ верно

$$x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y),$$

где векторы x и y сравниваются в покоординатном порядке. Булева схема называется монотонной, если в ней не используются отрицания, но наряду с переменными разрешается использовать константы 0 и 1. **а)** Докажите, что монотонная схема вычисляет монотонную булеву функцию. **б)** Докажите, что всякую монотонную булеву функцию можно вычислить монотонной булевой схемой.

8. Докажите, что всякую функцию $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ можно вычислить булевой схемой размера $O(2^n)$.

9. Постройте схему логарифмической глубины, вычисляющую функцию $PARITY = x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n$.

10. Постройте схему размера $O(n)$ и глубины $O(\log n)$, которая вычисляет функцию сравнения $L(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n)$.

11. Постройте схему, которая вычисляет сумму n-битовых двоичных чисел

а) полиномиального размера и глубины $O(\log n)$;

б) размера $O(n)$ и глубины $O(\log n)$.

Дискретная математика **Пилотный поток**

Домашнее задание 17

1. Треугольником в графе называется тройка вершин, попарно соединенных между собой. Рассмотрим вход функции $T\colon \{0,1\}^{\binom{n}{2}} \to \{0,1\}$ как неориентированный граф на n вершинах и положим $T(G) = 1$ тогда и только тогда, когда в G нет треугольников. Постройте схему полиномиального размера, которая вычисляет функцию T.

2. Постройте схему полиномиального размера, вычисляющую функцию MAJ. Функция $MAJ(x_1, \ldots, x_n)$ равна 1 тогда и только тогда, когда $\sum_i x_i > n/2$.

3. Постройте схему полиномиального размера, вычисляющую функцию MAJ и не использующую отрицаний.

4. Докажите, что функцию XOR_3 можно вычислить, используя лишь одно отрицание (и много конъюнкций и дизъюнкций).

5. Постройте схему полиномиального размера для функции $f\colon \{0,1\}^{\binom{n}{2}} \to \{0,1\}$, равной единице, тогда и только тогда, когда данный на вход граф связен и содержит эйлеров цикл (т. е. замкнутый маршрут, проходящий по каждому ребру графа ровно один раз).

6. Постройте схему полиномиального размера для функции $f\colon \{0,1\}^{\binom{n}{2}} \to \{0,1\}$, равной единице, тогда и только тогда, когда данный на вход граф раскрашиваем в два цвета.

7. Докажите, что всякую булеву схему размера s с n переменными можно переделать в булеву схему, в которой все отрицания применяются только к переменным, и при этом размер новой схемы не превышает $p(s, n)$, где p – некоторый фиксированный полином.