1. Пусть $U(p, x)$ — главная универсальная вычислимая функция. Докажите, что для любой вычислимой функции трёх аргументов $V(m, n, x)$ найдётся такая всюду определённая вычислимая функция $s(m, n)$, что $V(m, n, x) = U(s(m, n), x)$ для всех m, n, x.

2. Пусть $U(p, x)$ — главная универсальная вычислимая функция. Докажите, что найдется такое n, что $U(n, x) = n^2$ для всех x.

3. Докажите, что множество S перечислимо тогда и только тогда, когда существует вычислимая функция, область определения которой совпадает с S, а значение равно 0 в каждой точке области определения.

4. Пусть $U(p, x)$ — главная универсальная вычислимая функция, а S — множество тех p, для которых функция $U(p, x)$ не определена при всех x (т.е. это множество программ, которые не останавливаются ни на одном входе).

а) Докажите, что S неразрешимо, используя следующую вычислимую функцию от двух аргументов:

$$V(p, x) = \begin{cases} 0, & p \in K, \\ & \text{не определена в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь K — перечислимое неразрешимое множество.

б) Докажите, что S неперечислимо.

5. Докажите теорему Успенского–Райса аналогично предыдущей задаче.

Формулировка теоремы Успенского–Райса: если $U(p, x)$ — главная универсальная вычислимая функция и $\mathcal{A}$ — некоторое нетривиальное свойство функций (которое для некоторых вычислимых функций выполняется, а для некоторых — нет), то неразрешимо множество $N_{\mathcal{A}}$ номеров тех функций, для которых выполняется свойство $\mathcal{A}$.

6. Пусть $V(p, x)$ — универсальная вычислимая функция и существует такая всюду определённая функция $C(p, q)$, которая по номерам p и q вычислимых функций выдаёт номер их композиции (то есть $V(C(p, q), x) = V(p, V(q, x))$. Докажите, что V — главная.

7. Постройте неглавную универсальную вычислимую функцию.

8*. (Эффективное построение бесконечного количества программ для одной и той же функции.) Пусть $U(p, x)$ — главная универсальная вычислимая функция. Докажите, что существует такая всюду определённая вычислимая функция $g\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что для любого p все значения $g(p, i)$ различны и являются U-номерами функции $U(p, x)$ (то есть $U(p, x) = U(g(p, i), x)$ для всех x).

9*. (Теорема Роджерса: все главные функции изморфны.) Пусть $U_1(p, x)$, $U_2(p, x)$ — две главные универсальные вычислимые функции. Докажите, что существует такая вычислимая биекция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что $U_1(p, x) = U_2(f(p), x)$ и $U_1(f^{-1}(p), x) = U_2(p, x)$ для всех p и x.

1. Пусть $U(p, x)$ — главная универсальная вычислимая функция, а $V(n, x)$ — вычислимая функция от двух аргументов. Докажите, что найдётся такое p, что $U(p, x) = V(p, x)$ для всех x.

2. Пусть $U(p, x)$ — главная универсальная вычислимая функция. Докажите, что найдётся такое n, что $U(n, x) = n + x$ для всех x.

3. Пусть $U(p, x)$ — главная универсальная вычислимая функция. Докажите, что для любой всюду определённой функции $h(n)$ найдется бесконечно много неподвижных точек, то есть таких чисел p, что $U(p, x) = U(h(p), x)$.

4. Пусть $U(p, x)$ — главная универсальная вычислимая функция. Обозначим через $K \subset \mathbb{N}^2$ множество таких пар (k, n), что функция $U(k, x)$ является продолжением функции $U(n, x)$ (т.е. $U(k, x) = U(n, x)$ на области определения функции $U(n, x)$). Докажите, что множество K неразрешимо.

5. Пусть $U(p, x)$ — универсальная вычислимая функция. Докажите, что неперечислимо множество T таких номеров t, что $U(t, x)$ определена для всех x.

6. Докажите, что найдётся такая вычислимая функция $f(x)$, что $f(0) = 0$, а функция

$$m(x) = \max_{y \leq x,\ y \in \mathrm{Dom} f} f(y)$$

невычислима. (Максимум берётся по тем y, для которых $f(y)$ определена.)

7. Докажите, что всякое бесконечное перечислимое множество содержит бесконечное количество непересекающихся бесконечных перечислимых множеств.