

Занятие 19. Вычислимые функции, разрешимые и перечислимые множества

1. Вычислима ли следующая функция?

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{если существует бесконечно много пар простых чисел } p, p+2, \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

2. Докажите, что множество таких программ на языке C размером меньше 1Gb, которые никогда не останавливаются, разрешимо. (Считайте, что программа исполняется на идеализированном компьютере, имеющем потенциально бесконечную память.)

3. Докажите, что если A, B — перечислимые множества, то и множества $A \cup B, A \cap B$ перечислимы.

4. Докажите, что множество $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ перечислимо.

5. Докажите, что если существует алгоритм перечисления элементов некоторого множества, то существует также и алгоритм, который перечисляет элементы этого множества без повторений.

6. Докажите, что алгоритм перечисления элементов множества $S \subseteq \mathbb{N}$ в возрастающем порядке существует тогда и только тогда, когда множество S разрешимо.

7. Всюду определенная функция $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ невозрастающая. Верно ли, что f вычислима?

8. Докажите, что если $A \subseteq \mathbb{N}$ и $\mathbb{N} \setminus A$ перечислимы, то A разрешимо.

9. Перечислимо ли множество таких натуральных n , что уравнение $x^n + y^{n+1} = z^{n+2}$ имеет решение в положительных целых числах?

10. Докажите, что множество булевых функций, имеющих схемную сложность $> 2^{n/2}$ в стандартном базисе, разрешимо. Здесь n — количество переменных функции. Считайте, что алгоритм разрешения получает на вход булеву функцию в виде таблицы значений.

11. Пусть S — это множество таких n , что десятичная запись числа e содержит по крайней мере n девяток подряд. Докажите, что множество S разрешимо. (Разрешается использовать тот факт, что e — иррациональное число.)

Домашнее задание 18

Напоминаем, что ответы на вопросы должны быть обоснованы.

1. Множество натуральных чисел X разрешимо. Множество Y состоит из чисел вида n^2 , где $n \in X$. Разрешимо ли множество Y ?
2. Пусть множество X натуральных чисел перечислимо. Перечислимо ли множество $Y \subseteq X$ тех чисел из X , у которых сумма цифр равна 10?
3. Пусть множество X двоичных слов перечислимо. Докажите, что тогда перечислимо и множество P префиксов слов из X .
4. Докажите, что если A, B — перечислимые множества, то и множество $A \times B$ перечислимо.
5. Всюду определенная функция $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ строго возрастает и множество ее значений содержит все натуральные числа за исключением конечного множества. Докажите, что f вычислима.
6. Существуют ли такие множества $X, Y \subseteq \mathbb{N}$, что X разрешимо, $X \cup Y$ разрешимо, а Y не разрешимо?
7. Пусть S — разрешимое множество натуральных чисел. Множество D состоит из всех простых делителей множества S . Верно ли, что D перечислимо?
8. Докажите, что множество рациональных чисел, меньших e , разрешимо.