

## Занятие 19. Вычислимые функции, разрешимые и перечислимые множества

1. Вычислима ли следующая функция?

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{если существует бесконечно много пар простых чисел } p, p+2, \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

2. Докажите, что множество таких программ на языке C размером меньше 1Gb, которые никогда не останавливаются, разрешимо. (Считайте, что программа исполняется на идеализированном компьютере, имеющем потенциально бесконечную память.)

3. Докажите, что если  $A, B$  — перечислимые множества, то и множества  $A \cup B, A \cap B$  перечислимы.

4. Докажите, что множество  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  перечислимо.

5. Докажите, что если существует алгоритм перечисления элементов некоторого множества, то существует также и алгоритм, который перечисляет элементы этого множества без повторений.

6. Докажите, что алгоритм перечисления элементов множества  $S \subseteq \mathbb{N}$  в возрастающем порядке существует тогда и только тогда, когда множество  $S$  разрешимо.

7. Всюду определенная функция  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  невозрастающая. Верно ли, что  $f$  вычислима?

8. Докажите, что если  $A \subseteq \mathbb{N}$  и  $\mathbb{N} \setminus A$  перечислимы, то  $A$  разрешимо.

9. Перечислимо ли множество таких натуральных  $n$ , что уравнение  $x^n + y^{n+1} = z^{n+2}$  имеет решение в положительных целых числах?

10. Докажите, что множество булевых функций, имеющих схемную сложность  $> 2^{n/2}$  в стандартном базисе, разрешимо. Здесь  $n$  — количество переменных функции. Считайте, что алгоритм разрешения получает на вход булеву функцию в виде таблицы значений.

11. Пусть  $S$  — это множество таких  $n$ , что десятичная запись числа  $e$  содержит по крайней мере  $n$  девяток подряд. Докажите, что множество  $S$  разрешимо. (Разрешается использовать тот факт, что  $e$  — иррациональное число.)

## Домашнее задание 18

Напоминаем, что ответы на вопросы должны быть обоснованы.

1. Множество натуральных чисел  $X$  разрешимо. Множество  $Y$  состоит из чисел вида  $n^2$ , где  $n \in X$ . Разрешимо ли множество  $Y$ ?
2. Пусть множество  $X$  натуральных чисел перечислимо. Перечислимо ли множество  $Y \subseteq X$  тех чисел из  $X$ , у которых сумма цифр равна 10?
3. Пусть множество  $X$  двоичных слов перечислимо. Докажите, что тогда перечислимо и множество  $P$  префиксов слов из  $X$ .
4. Докажите, что если  $A, B$  — перечислимые множества, то и множество  $A \times B$  перечислимо.
5. Всюду определенная функция  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  строго возрастает и множество ее значений содержит все натуральные числа за исключением конечного множества. Докажите, что  $f$  вычислима.
6. Существуют ли такие множества  $X, Y \subseteq \mathbb{N}$ , что  $X$  разрешимо,  $X \cup Y$  разрешимо, а  $Y$  не разрешимо?
7. Пусть  $S$  — разрешимое множество натуральных чисел. Множество  $D$  состоит из всех простых делителей множества  $S$ . Верно ли, что  $D$  перечислимо?
8. Докажите, что множество рациональных чисел, меньших  $\epsilon$ , разрешимо.