

Занятие 19. Вычислимость

1. Перечислимо ли множество таких натуральных n , что уравнение $x^n + y^{n+1} = z^{n+2}$ имеет решение в положительных целых числах?
2. Пусть S — это множество таких n , что десятичная запись числа e содержит по крайней мере n девяток подряд. Докажите, что множество S разрешимое.
3. Всюду определенная функция $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ невозрастающая. Верно ли, что f вычислима?
4. Докажите, что проекция перечислимого множества $A \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ на первую координату перечислима. (Проекция A на первую координату определяется как $\{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N} (x, y) \in A\}$.)
5. Докажите, что если множества A и B перечислимы, то и множества $A \cup B$, $A \cap B$ перечислимы.
6. Докажите, что если A, B — перечислимые множества, то и множество $A \times B$ перечислимо.
7. Докажите, что если всюду определенная функция $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ вычислима и множество $A \subset \mathbb{N}$ разрешимо, то прообраз $\{x \mid f(x) \in A\}$ множества A разрешим.
8. Докажите, что если существует алгоритм перечисления элементов множества S в возрастающем порядке, то это множество разрешимо.
9. Докажите, что если существует алгоритм перечисления элементов некоторого множества, то существует также и алгоритм, который перечисляет элементы множества без повторений.
10. Докажите, что функция

$$c: (x, y) \mapsto \binom{x + y + 1}{2} + y$$

является вычислимой вместе с обратной биекцией между множествами $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ и \mathbb{N} .

11. Диофантово уравнение — это уравнение вида $P(x_1, \dots, x_n) = 0$, где P — многочлен с целыми коэффициентами. Докажите перечислимость множества диофантовых уравнений, у которых есть целочисленные решения.
12. Докажите, что не существует универсальной нумерации вычислимых всюду определенных функций, то есть такой всюду определенной вычислимой функции $U: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, что для любой вычислимой всюду определенной функции $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ найдется такое p , что $U(p, x) = f(x)$ для всех x .

Домашнее задание 18

1. Вычислима ли следующая функция?

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{если существует бесконечно много пар простых чисел } p, p+2, \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

2. Всюду определенная функция $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ строго возрастает и множество ее значений содержит все натуральные числа за исключением конечного множества. Докажите, что f вычислима.

3. Докажите, что если частичная функция f из \mathbb{N} в \mathbb{N} вычислима и $A \subset \mathbb{N}$ — перечислимое множество то и образ $\{f(x) \mid x \in A\}$, и прообраз $\{x \mid f(x) \in A\}$ множества A перечислимы.

4. Докажите, что бесконечное подмножество \mathbb{N} разрешимо тогда и только тогда, когда оно является областью значений всюду определенной возрастающей вычислимой функции из \mathbb{N} в \mathbb{N} .

5. Докажите, что непустое подмножество \mathbb{N} разрешимо тогда и только тогда, когда оно является областью значений всюду определенной неубывающей вычислимой функции из \mathbb{N} в \mathbb{N} .

6. Докажите, что любое бесконечное перечислимое множество содержит бесконечное разрешимое подмножество.

7. Пусть S — разрешимое множество натуральных чисел. Множество D состоит из всех простых делителей множества S . Верно ли, что D перечислимо?

8. Докажите, что множество рациональных чисел, меньших e , разрешимо.

9. Существуют ли такие множества $X, Y \subseteq \mathbb{N}$, что X разрешимо, $X \cup Y$ разрешимо, а Y не разрешимо?