Занятие 20. Вычислимость–2

1. Докажите, что если всюду определенная функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ вычислима и множество $A \subset \mathbb{N}$ разрешимо, то прообраз $\{x \mid f(x) \in A\}$ множества A разрешим.

2. Докажите, что функция вычислима тогда и только тогда, когда ее график перечислим.

3. Докажите, что проекция перечислимого множества $A \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ на первую координату перечислима. (Проекция A на первую координату определяется как $\{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N}\ (x, y) \in A\}$.)

4. Пусть U — универсальная вычислимая функция (универсальная нумерация). Докажите, что $U(p, p)$ не определено для некоторого p.

5. Пусть U — универсальная вычислимая функция (универсальная нумерация). Докажите, что множество Tot программ (номеров) всюду определённых вычислимых функций неперечислимо. Более точно, множество Tot состоит из таких p, что $U(p, x)$ определена для всех $x \in \mathbb{N}$.

6. Докажите, что любое перечислимое множество является проекцией разрешимого.

7. Найдите разрешимое множество $A \subseteq \mathbb{N}$ и вычислимую всюду определённую функцию $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такие, что образ $f(A)$ неразрешим.

8. а) Докажите, что существует функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, которая растет быстрее любой вычислимой. Это означает, что для любой вычислимой функции g найдётся такое N, что $f(x) > g(x)$ для всех $x > N$, принадлежащих области определения g.

б) Пусть функция f растёт быстрее любой вычислимой функции. Докажите, что $f(\mathbb{N})$ неразрешимо.

Дискретная математика **Основной поток**

Домашнее задание 19

Напоминаем, что ответы на вопросы должны быть обоснованы. Ссылка на утверждение, доказанное на лекции или в учебнике, считается обоснованием. Ссылка на утверждение задачи из классного листка обоснованием **не считается** — нужно воспроизвести рассуждение.

1. Докажите, что для любой универсальной вычислимой функции U множество $\{U(p,p) : p \in \mathbb{N}\}$ совпадает с $\mathbb{N}$.

2. Докажите, что во всяком бесконечном разрешимом множестве натуральных чисел есть перечислимое неразрешимое подмножество.

3. Докажите, что бесконечное подмножество $\mathbb{N}$ разрешимо тогда и только тогда, когда оно является областью значений всюду определенной возрастающей вычислимой функции из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$.

4. Докажите, что любое бесконечное перечислимое множество содержит бесконечное разрешимое подмножество.

5. Пусть X, Y — перечислимые множества. Докажите, что найдутся такие непересекающиеся перечислимые множества $X' \subseteq X$ и $Y' \subseteq Y$, $X' \cap Y' = \varnothing$, что $X \cup Y = X' \cup Y'$.

6. Докажите, что если частичная функция f из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$ вычислима и $A \subset \mathbb{N}$ — перечислимое множество то и образ $\{f(x) \mid x \in A\}$, и прообраз $\{x \mid f(x) \in A\}$ множества A перечислимы.

7. Найдите разрешимое множество $A \subseteq \mathbb{N}$ и вычислимую функцию $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такие, что прообраз $f^{-1}(A) = \{x \mid f(x) \in A\}$ неразрешим.

8. Докажите, что перечислимо множество программ, которые останавливаются хотя бы на одном входе. Более формально: пусть U — универсальная вычислимая функция, а S — множество тех p, для которых функция $U(p,x)$ определена хотя бы при одном x. Тогда S перечислимо.