Занятие 20. Вычислимость-2

1. Найдите разрешимое множество $A \subseteq \mathbb{N}$ и вычислимую всюду определённую функцию $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такие, что образ $f(A)$ неразрешим.

2. Докажите, что не существует универсальной вычислимой функции для вычислимых всюду определенных функций, то есть такой всюду определенной вычислимой функции $U\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что для любой вычислимой всюду определённой функции $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ найдется такое p, что $U(p, x) = f(x)$ для всех x.

3. Пусть U — универсальная вычислимая функция (универсальная нумерация). Докажите, что $U(p, p)$ не определено для некоторого p.

4. Пусть U – Геделева универсальная функция. Докажите, что множество

$$\{n \mid U_n(x) \text{ — нигде не определенная функция}\}$$

не перечислимо.

5. Докажите, что всякое перечислимое множество $A \subseteq \mathbb{N}$ является проекцией некоторого разрешимого множества $B \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

6. Докажите, что существует вычислимая функция, принимающая только значения 0 и 1, и не имеющая всюду определенного вычислимого продолжения.

7. Докажите, что существуют два непересекающихся множества C и D, такие что не существует разделяющего их разрешимого множества, то есть такого разрешимого множества E, что $C \subseteq E$ и $D \cap E = \emptyset$.

8. Докажите, что существует перечислимое множество $P \subseteq \mathbb{N}$, такое что P пересекается с любым бесконечным перечислимым множеством в $\mathbb{N}$, и при этом дополнение P бесконечно. Докажите, что P неразрешимо.

Дискретная математика **Пилотный поток**

Домашнее задание 19

1. Найдите разрешимое множество $A \subseteq \mathbb{N}$ и вычислимую функцию $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такие, что прообраз $f^{-1}(A)$ неразрешим.

2. Пусть X, Y — перечислимые множества. Докажите, что найдутся такие непересекающиеся перечислимые множества $X' \subseteq X$ и $Y' \subseteq Y$, $X' \cap Y' = \varnothing$, что $X \cup Y = X' \cup Y'$.

3. Докажите, что функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ вычислима тогда и только тогда, когда ее график

$$\Gamma = \{(x, y) \mid f(x) \text{ определена и равна } y\}$$

перечислим.

4. Докажите, что во всяком бесконечном разрешимом множестве натуральных чисел есть перечислимое неразрешимое подмножество.

5. Пусть $U(p, x)$ — главная универсальная вычислимая функция. Докажите, что для любой вычислимой функции трёх аргументов $V(m, n, x)$ найдётся такая всюду определённая вычислимая функция $s(m, n)$, что $V(m, n, x) = U(s(m, n), x)$ для всех m, n, x.

6. Пусть $U(p, x)$ — главная универсальная вычислимая функция. Обозначим через $K \subset \mathbb{N}^2$ множество таких пар (k, n), что функция $U(k, x)$ является продолжением функции $U(n, x)$ (т.е. $U(k, x) = U(n, x)$ на области определения функции $U(n, x)$). Докажите, что множество K неразрешимо.