1. Выведите неразрешимость проблемы остановки МТ напрямую из тезиса Чёрча–Тьюринга, не ссылаясь на существование универсальной машины или абстрактную теорию алгоритмов.

2. Упорядочим слова в алфавите $\{0, 1, \#\}$ по правилу: более короткое слово меньше более длинного, а слова одинаковой длины упорядочиваются лексикографически. Докажите, что существует МТ, которая по слову в алфавите $\{0, 1, \#\}$ находит следующее слово в указанном порядке.

3. Докажите существование МТ, которая по входу $\langle M\rangle\#\langle x\rangle\#1^t$ проверяет, останавливается ли машина M на входе x за t шагов.

4. Докажите, что существуют МТ, разрешающие следующие множества слов:

а) слова вида $\langle M\rangle$, где M — машина Тьюринга;

б) слова вида $\langle x\rangle$, где x — слово в некотором алфавите;

в) слова вида $\langle M\rangle \odot \langle x\rangle$, где M — машина Тьюринга, x — входное слово для M.

Разрешимость множества слов X машиной M означает, что M даёт результат 1 на словах из X и результат 0 на остальных словах.

5. Пусть $T(\langle M\rangle, \langle w\rangle)$ — номер того такта работы машины Тьюринга M на входе w, на котором головка в последний раз оказывается над пустым символом. (Если головка никогда не оказывается над пустым символом или оказывается над ним бесконечно много раз, $T(\langle M\rangle, \langle w\rangle)$ не определена.) Вычислима ли функция $T(\langle M\rangle, \langle w\rangle)$?

6. Постройте МТ, которая вставляет «много» пробелов. Более точно это означает, что машина преобразует конфигурацию $\dots[u\#wq_0\#v]\dots$ в конфигурацию $\dots[u\#wq_1\#\Lambda\dots\Lambda\#v]\dots$. Здесь Λ — пустой символ, q_0, q_1 состояния, символы $\#$, $[$, $]$ — разделители, слово w не содержит разделителей, а количество добавленных пустых символов равно длине слова w.

7. Докажите, что для каждой МТ M существует МТ M_{all}, которая исполняет работу M на всех входах. Это означает, что M_{all} работает по стадиям: первая стадия состоит в исполнении первого такта на первом входе, вторая — второго такта на первом входе и первого такта на втором входе и т.д.: на N-й стадии исполняется N-й такт на первом входе, $(N-1)$-й такт на втором входе, ..., первый такт на N-м входе. Порядок на входах такой же, как в задаче 2.

8. Пусть имеется МТ M, которая вычисляет функцию $V(n, x)$ от двух переменных. Докажите, что существует такая МТ S, которая по входу n выдаёт как результат описание МТ M_n, вычисляющей функцию $f_n(x) = V(n, x)$.

9*. Разрешима ли проблема остановки для машин Тьюринга с «хрупкой» лентой? Если такая машина меняет символ одной из ячеек ленты второй раз, то она останавливается («лента рвётся»).

10*. Разрешима ли проблема остановки для машин Тьюринга с засорившейся головкой? Это такие машины, которые могут записать на ленту только один символ $*$ («кляксу»). Формально это означает, что таблица переходов удовлетворяет условию если $\delta(a, q) = (a', q', d)$, то $a' \in \{a, *\}$.

В решениях задач этого задания разрешается ссылаться на результаты задач классного занятия 21.

1. Пусть машины M_1 и M_2 вычисляют функции $f_1\colon B^* \to \{0,1\}$ и $f_2\colon B^* \to \{0,1\}$. Докажите, что существует МТ M, которая вычисляет дизъюнкцию $f_1 \vee f_2$ этих функций.

2. Разрешимо ли множество описаний МТ, которые при работе на пустом входе не изменяют положение головки на ленте?

3. Докажите, что неразрешима проблема остановки МТ на пустом входе. Формально: не существует машины Тьюринга, которая получает на вход описание машины Тьюринга M и даёт результат 1, если M останавливается на пустом входе, и результат 0 в противном случае.

4. Разрешимо ли множество описаний МТ, которые на любом входном слове работают не дольше 2015 тактов?

5. Пусть $T_a(\langle M\rangle, \langle w\rangle)$ — номер того такта работы машины Тьюринга M на входе w, на котором головка в первый раз оказывается над символом a. (Если головка никогда не оказывается над символом a, функция $T_a(\langle M\rangle, \langle w\rangle)$ не определена.) Вычислима ли функция $T_a(\langle M\rangle, \langle w\rangle)$?

6. Докажите, что существует МТ, которая вычисляет биекцию $c\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, где

$$c\colon (x,y) \mapsto \binom{x+y+1}{2} + y.$$

Числа заданы в унарной записи (т.е. n записывается как слово 1^n).

7. Докажите, что существует МТ, которая на любом входе выдаёт в качестве результата своё описание.

8. Докажите, что существует МТ, которая перечисляет описания тех МТ, которые останавливаются хотя бы на одном входе.