Дискретная математика **Основной поток**

Занятие 21. Вычислимость–3: главные нумерации

1. Пусть $U(x, y)$ — универсальная вычислимая функция. Докажите, что $V(x, y) = U(y, x)$ не является универсальной.

2. Пусть $U(p, x)$ — главная универсальная вычислимая функция. Докажите, что неразрешимо множество тех программ, которые вычисляют функцию $x \mapsto x^2$. Более формально речь идёт о множестве

$$\{p \mid U(p, x) = x^2 \text{ для всех } x\}.$$

3. В задаче 8 домашнего задания 19 утверждается, что для любой универсальной функции перечислимо множество программ, которые останавливаются хотя бы на одном входе. Используя это утверждение и теорему Успенского–Райса, докажите, что для любой главной универсальной функция U множество

$$\{n \mid U(n, x) \text{ не определена для любого } x\}$$

программ, задающих нигде не определенную функцию, неперечислимо.

4. (Программа, печатающая свой текст.) Пусть $U(p, x)$ — главная универсальная вычислимая функция.

а) Докажите, что найдется такое n, что $U(n, x) = n$ для всех x.

б) Докажите, что таких n бесконечно много.

в) Докажите, что множество

$$\{n \mid U(n, x) = n \text{ для всех } x\}$$

неразрешимо. (Применима ли в данном случае теорема Успенского–Райса?)

5. (Автоматическая композиция программ.)

а) Пусть $U(p, x)$ — главная универсальная вычислимая функция. Докажите, что существует такая всюду определённая вычислимая функция $C(p, q)$, что для любых x, p, q выполняется

$$U(C(p, q), x) = U(p, U(q, x))$$

(то есть существует алгоритм, который строит программу, вычисляющую композицию двух функций, заданных программами).

б) Пусть $V(p, x)$ — универсальная вычислимая функция и существует такая всюду определённая функция $C(p, q)$, которая по номерам p и q вычислимых функций выдаёт номер их композиции (то есть $V(C(p, q), x) = V(p, V(q, x))$). Докажите, что V — главная.

Дискретная математика **Основной поток**

Домашнее задание 20

Напоминаем, что ответы на вопросы должны быть обоснованы. Ссылка на утверждение, доказанное на лекции или в учебнике, считается обоснованием. Ссылка на утверждение задачи из классного листка обоснованием **не считается** — нужно воспроизвести рассуждение.

1. Пусть $U(p,x)$ — главная универсальная вычислимая функция. Докажите, что найдется бесконечно много таких p, что $U(p,x) = 2016$ для любого x.

2. Существует ли такая главная универсальная функция $U(p,x)$, в которой множество программ I, вычисляющих тождественную функцию $f(x) = x$, совпадает с множеством чётных чисел? Более точно множество I задаётся как

$$I = \{p \mid \forall x\ U(p,x) = x\}.$$

3. Пусть $U(p,x)$ — главная универсальная вычислимая функция. Докажите, что найдётся такое n, что $U(n,x) = n + x$ для всех x.

4. Докажите, что всякое бесконечное перечислимое множество содержит бесконечное количество непересекающихся бесконечных перечислимых множеств.

5. Пусть $U(p,x)$ — главная универсальная вычислимая функция. Докажите, что для любой вычислимой функции трёх аргументов $V(m,n,x)$ найдётся такая всюду определённая вычислимая функция $s(m,n)$, что $V(m,n,x) = U(s(m,n),x)$ для всех m, n, x.

6. Пусть $U(p,x)$ — главная универсальная вычислимая функция. Обозначим через $K \subset \mathbb{N}^2$ множество таких пар (k,n), что функция $U_k(x) = U(k,x)$ является продолжением функции $U_n(x) = U(n,x)$ (т.е. $U(k,x) = U(n,x)$ если $U(n,x)$ определена). Докажите, что множество K неразрешимо.