Дискретная математика **Пилотный поток**

Занятие 21. Вычислимость-3

1. Пусть $U(p, x)$ — главная универсальная вычислимая функция. Докажите, что найдется такое n, что $U(n, x) = n^2$ для всех x.

2. Перечислимое множество $W \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ называется *главным универсальным перечислимым множеством* (для класса перечислимых подмножеств $\mathbb{N}$) если для любого перечислимого множества $V \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ существует всюду определенная вычислимая функция $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такая, что

$$(n, x) \in V \Leftrightarrow (s(n), x) \in W.$$

Докажите, что главное универсальное перечислимое множество существует.

3. Существует ли множество натуральных чисел, к которому m-сводится любое другое множество натуральных чисел?

4. Какие разрешимые подмножества $\mathbb{N}$ являются m-полными в классе разрешимых множеств?

5. Пусть U – главная универсальная вычислимая функция. Докажите, что множество $\{n \mid U(n, 0) = 0\}$ является m-полным в классе перечислимых множеств.

6. Пусть $U(p, x)$ — главная универсальная вычислимая функция. Докажите, что для любой всюду определённой функции $h(n)$ найдется бесконечно много неподвижных точек, то есть таких чисел p, что $U(p, x) = U(h(p), x)$.

7. Пусть $W \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ является главным универсальным перечислимым множеством. Докажите, что существует такое n, что $W_n = \{n\}$. Через W_n мы обозначаем множество $\{k \mid (n, k) \in W\}$.

8. Постройте неглавную универсальную вычислимую функцию.

9. Докажите, что существует перечислимое множество $P \subseteq \mathbb{N}$, такое что P пересекается с любым бесконечным перечислимым множеством в $\mathbb{N}$, и при этом дополнение P бесконечно. Докажите, что P неразрешимо.

10*. Пусть $U(p, x)$ — универсальная вычислимая функция и существует такая всюду определённая функция $C(p, q)$, которая по номерам p и q вычислимых функций выдаёт номер их композиции (то есть $U(C(p, q), x) = U(p, U(q, x))$. Докажите, что U — главная.

Дискретная математика **Пилотный поток**

Домашнее задание 20

1. Докажите, что всякое бесконечное перечислимое множество содержит бесконечное количество непересекающихся бесконечных перечислимых множеств.

2. Пусть множество $K \subseteq \mathbb{N}$ перечислимо, но неразрешимо. Докажите, что ни множество $K \times \mathbb{N} \setminus K \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ не является перечислимым, ни его дополнение.

3. Пусть $U(p, x)$ — главная универсальная вычислимая функция. Докажите, что найдётся такое n, что $U(n, x) = n + x$ для всех x.

4. Пусть $A \subseteq \mathbb{N}$ — перечислимое неразрешимое множество. Докажите, что A не является m-сводимым к своему дополнению $\mathbb{N} \setminus A$.

5. Пусть U – главная универсальная вычислимая функция. Докажите, что множество $\{n \mid U(n, n) = n\}$ является m-полным в классе перечислимых множеств.

6. Существует ли главная универсальная вычислимая функция $U(n, x)$, такая что множество номеров $\{n \mid U_n$ — нигде не определенная функция$\}$ совпадает с множеством четных чисел?

7. Пусть $U(p, x)$ — универсальная вычислимая функция. Докажите, что неперечислимо множество T таких номеров t, что $U(t, x)$ определена для всех x.