1. Пусть граф на множестве слов в алфавите $\{0, 1\}$ задан набором правил подстановки

$$\{010 \to 101,\ 101 \to 010\}.$$

Докажите, что задача достижимости для такого графа разрешима.

2. Разрешима ли задача достижимости для графов, заданных правилами подстановки вида $u \to a$, где где a — символ алфавита, u — непустое слово?

3. Докажите, что алгоритмически неразрешима задача достижимости для графов, заданных правилами подстановки в алфавите из двух символов.

4. Разрешима ли задача достижимости для графов, заданных правилами подстановки вида $au \to av$, где a — некоторый фиксированный символ алфавита?

5. Граф, заданный на множестве слов набором правил подстановки, назовём универсальным, если в этом графе любое слово достижимо из пустого.

а) Разрешима ли проверка на универсальность графа, заданного правилами подстановки?

б) Перечислимо ли множество описаний универсальных графов, заданных набором правил подстановки?

6. Докажите, что алгоритмически неразрешима задача остановки МТ в двоичном алфавите (то есть алфавит содержит всего один непустой символ).

7*. Разрешима ли проверка ацикличности графа, заданного правилами подстановки? (Ацикличность графа означает, что в графе нет ориентированных циклов.)

Дискретная математика **Домашнее задание 22 (повторение)**

Уведомление. Это задание не будет проверяться и не будет учитываться в итоговой оценке по курсу. Задание предназначено для подготовки к экзамену, решения задач будут обсуждаться на лекциях и семинарах.

1. Найдите максимальное количество рёбер в таких ориентированных графах на n вершинах, которые не имеют ориентированных циклов.

2. Случайно, равновероятно и независимо выбираются два положительных делителя числа 12!. Сравните вероятность того, что эти делители взаимно просты, с 1/100.

3. Найдите НОД$(\underbrace{11\ldots11}_{\text{120 штук}}, \underbrace{11\ldots11}_{\text{84 штуки}})$. (Числа записаны в десятичной системе счисления.)

4. Рассмотрим вход функции Tree: $\{0,1\}^{\binom{n}{2}} \to \{0,1\}$ как неориентированный граф на n вершинах и положим $\mathrm{Tree}(G) = 1$ тогда и только тогда, когда G дерево. Найдите сложность вычисления функции Tree в модели разрешающих деревьев.

5. Булева функция $U_2(x_1, \ldots, x_n)$ равна 1 тогда и только тогда, когда среди значений $x_1, \ldots, x_n$ есть ровно 2 единицы. Постройте схему размера $O(n)$, вычисляющую функцию U_2.

6. Постройте вычислимую биекцию $f\colon \{0,1\}^* \times \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ между множеством пар двоичных слов и множеством двоичных слов. Укажите явно правило, которое сопоставляет паре слов значение этой биекции. Найдите для построенной биекции (а) $f(00, 11)$, (б) $f^{-1}(10)$.

7. Известно, что функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ невычислима. Верно ли, что множество её значений

$$f(\mathbb{N}) = \{y : y = f(x) \text{ для некоторого } x\}$$

неразрешимо?

8. Пусть $U(p, x)$ — главная универсальная вычислимая функция. Докажите, что перечислимо множество тех программ, которые вычисляют функцию, не равную 0 на всей области определения. (Формально это множество таких чисел p, что $U(p, x) \neq 0$ для некоторого x.)