Дискретная математика **Пилотный поток**

Занятие 24. Неразрешимость

1. Пусть граф на множестве слов в алфавите $\{0, 1\}$ задан набором правил подстановки

$$\{010 \to 101,\ 101 \to 010\}.$$

Докажите, что задача достижимости для такого графа разрешима.

2. Разрешима ли задача достижимости для графов, заданных правилами подстановки вида $u \to a$, где где a — символ алфавита, u — непустое слово?

3. Докажите, что алгоритмически неразрешима задача достижимости для графов, заданных правилами подстановки в алфавите из двух символов.

4. Разрешима ли задача достижимости для графов, заданных правилами подстановки вида $au \to av$, где a — некоторый фиксированный символ алфавита?

5. Граф, заданный на множестве слов набором правил подстановки, назовём универсальным, если в этом графе любое слово достижимо из пустого.

а) Разрешима ли проверка на универсальность графа, заданного правилами подстановки?

б) Перечислимо ли множество описаний универсальных графов, заданных набором правил подстановки?

6. Разрешима ли проверка ацикличности графа, заданного правилами подстановки? (Ацикличность графа означает, что в графе нет ориентированных циклов.)

Дискретная математика **Пилотный поток**

Домашнее задание 23

Уведомление. Это задание не будет проверяться и не будет учитываться в итоговой оценке по курсу. Задание предназначено для подготовки к экзамену, решения задач будут обсуждаться на лекциях и семинарах.

1. Найдите максимальное количество рёбер в ациклических ориентированных графах на n вершинах. (Напомним, что по использованному в курсе определению параллельных рёбер в графе нет.)

2. Рассмотрим полное двоичное дерево глубины n (то есть с 2^n листьями). Рассмотрим следующий процесс покраски вершин. Изначально покрашен только корень дерева. На каждом шаге, каждая непокрашенная вершина, соседняя с какой-то уже покрашенной, красится с вероятностью $1/2$ (независимо от других вершин). Найдите математическое ожидание числа покрашенных листьев после $2n-1$ шагов.

3. В множестве из n элементов выбрано $2^{n-1}+1$ подмножество. Докажите, что среди этих подмножеств есть два непересекающихся.

4. Булева функция $U_2(x_1, \ldots, x_n)$ равна 1 тогда и только тогда, когда среди значений $x_1, \ldots, x_n$ есть ровно 2 единицы. Постройте схему размера $O(n)$, вычисляющую функцию U_2.

5. Известно, что функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ невычислима. Верно ли, что множество её значений

$$f(\mathbb{N}) = \{y : y = f(x) \text{ для некоторого } x\}$$

неразрешимо?

6. Пусть $U(p, x)$ — универсальная вычислимая функция. Докажите, что перечислимо множество тех программ, которые вычисляют функцию, не равную 0 на всей области определения. (Формально это множество таких чисел p, что $U(p, x)$ определена для некоторого x и ее значение $U(p, x) \neq 0$.)

7. Множество $\mathbb{R}$ действительных чисел разбито на два множества A и B, то есть $A \cup B = \mathbb{R}$, $A \cap B = \varnothing$. Докажите, что хотя бы одно из множеств A или B имеет мощность континуум.

8. Рассмотрим вход функции $\mathrm{Tree}\colon \{0,1\}^{\binom{n}{2}} \to \{0,1\}$ как неориентированный граф на n вершинах и положим $\mathrm{Tree}(G) = 1$ тогда и только тогда, когда G дерево. Найдите сложность вычисления функции Tree в модели разрешающих деревьев.

9. Про случайную неотрицательную величину X известно, что $\mathrm{E}[X] = 1$, $\mathrm{E}[X^2] = 2$. Докажите, что $\mathrm{E}[X^3] \geqslant 4$. ($\mathrm{E}[A]$ — математическое ожидание случайной величины A.)