Дискретная математика **Домашнее задание 1**

1. Докажите равенства

а) $1 \cdot (n-1) + 2 \cdot (n-2) + \cdots + (n-1) \cdot 1 = \dfrac{(n-1)n(n+1)}{6}$;

б) $\cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} - \dfrac{1}{2}$.

2. Докажите неравенства

а) $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n} > \dfrac{2}{3} \cdot n\sqrt{n}$;

б) $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \dfrac{2n-1}{2n} < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

3. На кольцевой дороге стоит некоторое количество одинаковых автомобилей. Суммарное количество бензина в их бензобаках достаточно, чтобы один автомобиль мог совершить полный круг. Докажите, что найдется автомобиль, который, начав двигаться против часовой стрелки и забирая бензин по ходу движения у стоящих на дороге автомобилей, сможет совершить полный круг.

4. В зачете участвовало несколько студентов и преподавателей. Известно, что в комнату, где происходил зачет, каждый участник зачета вошел лишь однажды и что каждый преподаватель поговорил с каждым студентом. Докажите, что в какой-то момент зачета в комнате присутствовали либо все студенты (и, может быть, кто-то из преподавателей), либо все преподаватели (и, может быть, кто-то из студентов).

5. В прямоугольнике $3 \times n$ стоят фишки трех цветов, по n штук каждого цвета. Докажите, что можно переставить фишки в каждой строке так, чтобы в каждом столбце были фишки всех цветов.

6. Целые положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ таковы, что $a_k \le k$ и сумма всех этих чисел четна и равна $2S$. Докажите, что эти числа можно разбить на две группы, сумма по каждой из которых равна S.

7. На табло есть несколько лампочек и несколько кнопок, некоторые лампочки горят. Нажатие кнопки меняет состояние лампочек, с которыми она соединена. Известно, что, для любого набора лампочек найдется кнопка, соединенная с нечетным числом лампочек из этого набора. Докажите, что нажимая на кнопки можно погасить все лампочки.