Дискретная математика **Домашнее задание 4, группа 101**

1. Рассмотрим на множестве $\mathbb{R}$ бинарное отношение $R(x, y)$, означающее, что $xy > 1$. Чему равно $R \circ R$?

2. Докажите, что $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) \subseteq (A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2)$. При каких условиях на A_1, A_2, B_1, B_2 получается равенство?

3. В ходе турнира каждая команда сыграла с каждой по одному разу, причём ничьих не было и каждая команда хоть кому-то да проиграла. Докажите, что найдутся три команды А, Б, В, нарушившие транзитивность: А выиграла у Б, Б выиграла у В, а В выиграла у А.

4. Функция f определена на множестве $A \cup B$ и принимает значения в множестве Y. Какой знак сравнения можно поставить вместо ?, чтобы утверждение

$$f(A \setminus B) \mathbin{?} f(A) \setminus f(B)$$

стало верным?

5. Функция f определена на множестве X и принимает значения в множестве Y, при этом $A \cup B \subseteq Y$. Какой знак сравнения можно поставить вместо ?, чтобы утверждение

$$f^{-1}(A \setminus B) \mathbin{?} f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$$

стало верным?

6. Покажите, что если для функций $f\colon A \to B$ и $g\colon B \to A$ выполнены два равенства $g \circ f = \mathrm{id}_A$ и $f \circ g = \mathrm{id}_B$, то функция f является биекцией и g обратна к f.

7. На плоскости нарисовано некоторое количество равносторонних треугольников. Они не пересекаются, но могут иметь общие участки сторон. Мы хотим покрасить каждый треугольник в какой-нибудь цвет так, чтобы те из них, которые соприкасаются, были покрашены в разные цвета (треугольники, имеющие одну общую точку, могут быть покрашены в один цвет). Хватит ли для такой раскраски двух цветов?

8. Найдите количество неубывающих функций $f\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, m\}$. Функция неубывающая, если $x \le y$ влечет $f(x) \le f(y)$.

9*. Докажите, что существует биекция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, такая что $f(f(n))$ переводит четные числа в нечетные, а нечетные в четные.

10*. Докажите, что существует функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, такая что для всякого $n \in \mathbb{N}$

$$f(f(n)) \equiv n^2.$$