Дискретная математика **Домашнее задание 8, группа 101**

1. Существует ли граф на 8 вершинах, в котором 23 ребра и есть вершина степени 1?

2. В графе никакие два цикла не имеют общих вершин. Может ли в таком графе быть 3 цикла, 16 вершин и 17 рёбер?

3. В стране Цифра есть 9 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Путешественник обнаружил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, составленное из цифр-названий этих городов, делится на 3. Можно ли добраться из города 1 в город 9, используя эти авиалинии (возможно, с пересадками)?

4. В стране Семёрка 15 городов, каждый из которых соединён дорогами не менее, чем с 7 другими. Докажите, что из любого города можно добраться до любого другого (возможно, проезжая через другие города).

5. В дереве на 2014 вершинах ровно три вершины имеют степень 1. Сколько вершин имеют степень 3?

6. Куб со стороной $n \geq 3$ разбит перегородками на единичные кубики. Какое минимальное число перегородок между единичными кубиками нужно удалить, чтобы из каждого кубика можно было добраться до границы куба?

7. Известно, что в графе существует замкнутый маршрут, проходящий по каждому ребру ровно два раза. Верно ли, что в графе есть эйлеров цикл?

8. Докажите, что во всяком турнире есть маршрут, который проходит ровно по разу через каждую вершину и не нарушает ориентации рёбер (движение от начала ребра к концу).

9. Докажите, что при любых $0 \leq k \leq n$ таких, что kn — чётное, существует граф на n вершинах, степени которого равны k.

10. В графе $2n$ вершин, степень каждой равна n. Докажите, что после удаления любого подмножества из менее чем n рёбер получается связный граф.

11*. Придумайте алгоритм, работающий за полиномиальное время, находящий в графе вершинное покрытие, которое по размеру превышает минимальное не более чем в два раза.