
9.7. Докажите, что найдётся такой турнир, в котором любые 10 команд проиграли какой-то одной команде (победители разных десяток могут различаться).

9.8. Прямоугольная таблица заполнена нулями и единицами. В таблице $3n$ столбцов, а в каждой строке ровно n единиц. Известно, что для любых двух строк найдётся такой столбец, в котором в данных строках стоят единицы.

а) Докажите, что вероятность того, что случайно выбранная строка из n единиц и $2n$ нулей входит в такую таблицу, не больше $1/3$.

б) Докажите, что количество строк в такой таблице не больше $\binom{3n-1}{n-1}$.

Замечание: если вы не решили пункт а), но умеете решать пункт б) с использованием пункта а), запишите это рассуждение.

Пояснение. Эта задачи были в задании 9. Их решения разрешается сдавать вместе с этим заданием (номер 11).

---

1. В лотерее на выигрыши уходит 40% от стоимости проданных билетов. Каждый билет стоит 100 рублей. Докажите, что вероятность выиграть 5000 рублей (или больше) меньше 1%.

2. Выбирается случайно и равновозможно 10 чисел из множества целых чисел от 0 до 29. Найдите математическое ожидание суммы этих чисел.

3. Выбирается случайное слово длины 20 в алфавите $\{a, b\}$ (все слова равновозможны). Найдите математическое ожидание числа подслов ab в этом слове.

4. По таблицам смертности, составленным в 1693 г. Э. Галлеем, средняя продолжительность жизни была 26 лет. При этом вероятность прожить не больше 8 лет была 1/2. Какова была средняя продолжительность жизни тех людей, которые прожили не меньше 8 лет? (Укажите интервал возможных при данных условиях значений.)

5. Докажите, что вероятность получить в 10 бросаниях игральной кости сумму не меньше 50 не превосходит 1/30.

6. Производится 10000 случайных и независимых подбрасываний честной монеты. Докажите, что вероятность того, что в этой серии подбрасываний не встретилось 10 орлов подряд, не превосходит 1/2.

7. В графе n вершин и $nd/2$ рёбер (то есть средняя степень вершины равна d), $d \geq 1$. Докажите, что в графе есть независимое множество размера не меньше $n/2d$.

Подсказка. В решении этой задачи поможет случайное множество V_p, в которое каждая вершина входит с вероятностью p независимо от других вершин. (При подходящем значении параметра p.)