

1. Найдите остаток при делении 99^{1000} на 100.
2. Докажите, что число $x + 10y$ делится на 13 тогда и только тогда, когда $y + 4x$ делится на 13.
3. Решите сравнение $74x \equiv 1 \pmod{47}$.
4. Существует ли решение уравнения $37x + 71y = 12345$ в неотрицательных целых числах?
5. Докажите, что дробь $\frac{n^2 - n + 1}{n^2 + 1}$ несократима при всех положительных целых n .
6. Найдите самое большое возможное значение $\text{НОД}(a, b)$, если известно, что $ab = 12!$.
7. Найдите $\text{НОД}(3^{168} - 1, 3^{140} - 1)$.
8. Докажите, что числитель несократимой дроби, равной $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p-1}$, делится на p для любого простого $p > 2$.
9. Докажите, что число $2^{2^n} - 1$ имеет по крайней мере n различных простых делителей.