

1. Докажите, что при любом нечетном n число $2^{n!} - 1$ делится на n .
2. Найдите остаток от деления $8^{8^{8^8}}$ на 13.
3. Известно, что $a^{10} + b^{10} + c^{10} + d^{10} + e^{10} + f^{10}$ делится на 11. Докажите, что $abcdef$ делится на 11^6 .
4. При каких целых n число $a_n = n^2 + 3n + 1$ делится на 55?
5. Существует ли степень тройки, заканчивающаяся на $\dots 0001$ в десятичной записи?
6. Решить сравнение $x^2 \equiv 1 \pmod{200}$.
7. Найдите наименьшее положительное целое число, половина которого — квадрат целого, треть — куб, а пятая часть — пятая степень.
8. Может ли число, в десятичной записи которого 100 нулей, 100 единиц и 100 двоек, быть точным квадратом? (Т.е. квадратный корень целый.)
9. Докажите, что при любом k существует ровно 4 решения сравнения $x^2 \equiv x \pmod{10^k}$.