

1. Найдите сложность вычисления суммы по модулю два  $\bigoplus_i x_i$  в модели разрешающих деревьев.
2. Пусть числовой массив  $a[1], \dots, a[n]$  строго унимодален. Это означает, что существует  $t$ , такое что

$$a[1] < a[2] < \dots < a[t] > a[t+1] > \dots > a[n-1] > a[n], \quad 1 \leq t \leq n.$$

Разрешается за один ход спросить значение одного элемента массива. Докажите, что можно найти значение максимального элемента  $a[t]$  за не более  $O(\log n)$  ходов.

3. Есть  $n$  монет, среди которых одна фальшивая. Настоящие монеты все имеют одинаковый вес, а фальшивая легче. За одно взвешивание можно сравнить две по весу любые две монеты. Докажите, что фальшивую монету можно найти за  $\lfloor n/2 \rfloor$  взвешиваний.
4. Докажите, что в условиях предыдущей задачи для нахождения фальшивой монеты необходимо  $\lfloor n/2 \rfloor$  взвешиваний.
5. Имеется  $n$  монет, среди которых одна фальшивая, и чашечные весы. Настоящие монеты все имеют одинаковый вес, а фальшивая легче. На каждую чашку весов можно класть произвольное количество монет. Докажите, что фальшивую монету можно найти за  $\lceil \log_3 n \rceil$  взвешиваний.
6. Докажите, что в условиях предыдущей задачи для нахождения фальшивой монеты необходимо  $\lceil \log_3 n \rceil$  взвешиваний.
7. Найдите среди  $n$  монет самую тяжелую и вторую по тяжести монету за  $n + \log n + O(1)$  взвешиваний.
8. Докажите, что нельзя найти самую тяжелую и вторую по тяжести монету из  $n$  монет за менее чем  $n + \log n + \Omega(1)$  взвешиваний.