Лекция 1: математическая индукция

Дискретная математика, ВШЭ, факультет компьютерных наук

(Осень 2014 – весна 2015)

Математическая индукция — очень популярный способ рассуждений. Он будет часто применяться дальше в курсе, поэтому мы начнем с подробного обсуждения индуктивных доказательств.

Начнем с разбора конкретной задачи.

Задача 1. На плоскости проведено несколько прямых. Они делят плоскость на области. Докажите, что области можно так раскрасить в два цвета, что соседние (по отрезку или лучу) области покрашены в разные цвета.

Для любого конкретного набора прямых требуемую раскраску легко построить. Но задача состоит в том, чтобы доказать существование раскраски для всех возможных наборов прямых.

Одна из напрашивающихся идей — анализировать возможные варианты от простых к сложным. Чем больше прямых, тем сложнее выглядят разбиения на области.

Попробуем понять, что происходит при добавлении одной прямой. Пусть есть набор прямых и области, на которые они разбили плоскость уже покрашены как требуется.

Проведем еще одну прямую. Как получить раскраску для новой конфигурации? Посмотрим на область старой конфигурации, которую пересекает новая прямая. Она разбивается на две области, цвета которых по условию задачи должны быть различны.

Поменяем цвет у одной из областей и сохраним у другой. В этом месте препятствие устранено, но возникают новые.

Поэтому сделаем более обширную перекраску. Перекрасим в другой цвет все области по одну сторону от новой прямой.

Важное наблюдение состоит в том, что если исходная раскраска была правильной, то и новая раскраска правильная. Действительно, те соседние области, которые не разрезаны новой прямой, либо меняют одновременно цвет, либо одновременно не меняют. Поэтому совпасть цвета у них не могут (в исходной раскраске всё было правильно). Те же соседние области, которые получаются разрезанием старых по построению имеют разные цвета.

Это наблюдение можно сформулировать так: «если утверждение задачи справедливо для всех конфигураций из n прямых, оно также справедливо и для всех конфигураций из $n+1$-й прямой».

Но задачу мы пока не решили: доказано лишь условное утверждение. Чтобы убедиться в справедливости утверждения задачи, нужна еще «затравка» или по-научному базис индукции. В данном случае таким базисом является случай 1 прямой. Утверждение задачи в этом случае очевидно.

Используя доказанное условное утверждение, получаем справедливость утверждения для $n = 2$, затем для $n = 3$ и т.д. Добавляя по единице, возможно добраться до любого числа прямых. Значит, утверждение справедливо для любого числа прямых.

Сформулируем теперь общий принцип, на котором было основано наше рассуждение.

> **Принцип математической индукции.** *Если некоторое утверждение $A(n)$, зависящее от натурального параметра n, верно для $n = 1$ и для любого n верно утверждение «если $A(n)$ верно, то и $A(n+1)$ верно», то утверждение $A(n)$ верно при любом n.*

Утверждение «если $A(n)$ верно, то и $A(n+1)$ верно» называется индуктивным переходом.

Выбор в качестве базиса числа 1 связан с тем, что в нашей задаче это наименьшее возможное значение параметра[1]. Если заменить его на положительное число, идея рассуждения не изменится. Нужно только позаботиться о проверке истинности тех значений n, которые оказываются меньше выбранного в качестве базиса.

Индуктивные рассуждения удобны, но зачастую скрывают суть решения задачи. Например, в задаче о раскраске ту же самую раскраску легко описать общим правилом. Свяжем с каждой прямой линейную функцию f_i, которая на ней обрщается в 0. Точке x, не лежащей на одной из прямых, сопоставим число $+1$, если $f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n > 0$, и число -1 в противном случае. Легко видеть, что внутри области числа одни и те же. Поэтому мы задали раскраску. С другой стороны, эта раскраска правильная: в соседних областях отличается знак ровно одной функции, поэтому им приписаны разные знаки.

Нетрудно проверить, что мы получим ту же самую (с точностью до выбора знака) раскраску, что и при индуктивном рассуждении.

Принцип математической индукции равносилен следующему свойству натуральных чисел.

> **Принцип наименьшего числа.** *В любом непустом множестве натуральных чисел есть наименьшее.*

В пустом множестве нет ни одного элемента, так что для него принцип наименьшего числа нарушается.

Выведем принцип математической индукции из принципа наименьшего числа. Доказательство от противного.

Предположим, что утверждение $A(n)$ верно не при любых n. Рассмотрим множество тех чисел, для которых оно неверно. В нем есть наименьшее число N. Это число не равно 1, так как $A(1)$ истинно. Но тогда $A(N-1)$ истинно по выбору N. Значит, и $A(N) = A(N-1+1)$ истинно. Пришли к противоречию.

Обратно. Докажем принцип наименьшего числа индукцией. Пусть в множестве $X \subseteq \mathbb{N}$ нет наименьшего числа. В качестве утверждения $A(n)$ возьмем такое: «все числа от 0 до n не принадлежат X». Ясно, что $A(0)$ (так как меньше нуля чисел нет). С другой стороны, если $A(n)$ истинно, то $A(n+1)$ тоже истинно (иначе $n+1$ наименьшее в X). По принципу математической индукции $A(n)$ истинно для всех n. Поэтому множество X пустое.

Покажем как применять принцип наименьшего числа.

Задача 2. На плоскости проведено n прямых, $n \geqslant 3$, не все из которых проходят через одну точку. Они делят плоскость на области. Докажите, что среди этих областей есть треугольная (быть может, бесконечная).

Случай $n = 3$ анализируется непосредственно. Теперь от противного. Рассмотрим наименьшее $N > 3$, при котором есть конфигурация прямых без треугольных областей.

При выбрасывании любой из N прямых получается либо набор прямых, проходящих через одну точку, либо конфигурация с треугольной областью. Первый случай встречается лишь один раз. Рассмотрим любую другую прямую ℓ и треуггольную область T, образованную оставшимися прямыми.

Прямая ℓ пересекает T так, что не остается треугольных областей. Легко убедиться, что это невозможно. Пришли к противоречию.

Известное из школы доказательство иррациональности $\sqrt{2}$ также использует принцип наименьшего числа.

Дальше рассмотрим несколько типичных примеров рассуждений по индукции.

---

[1] Мы будем считать 0 натуральным числом. Принцип математической индукции тогда нужно формулировать, начиная с 0

1 Доказательство формул суммирования по индукции

Простейшие примеры формул суммирования — это суммы арифметической и геометрической прогрессии:

$$1 + 2 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}; \tag{1}$$

$$1 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1. \tag{2}$$

В первом случае утверждение $A(n)$ из принципа математической индукции означает справедливость формулы (1) для данного конкретного n. Проверить $A(1)$ очень легко: $1 = 1 \cdot 2/2$. Далее нужно доказать спрведливость условного утверждения. Пусть

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

тогда

$$1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+2)(n+1)}{2}.$$

Аналогично для геометрической прогресии: $1 = 2^{0+1} - 1$ и индуктивный переход получается прямой выкладкой. Если

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1,$$

то

$$\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = \sum_{k=0}^{n} 2^k + 2^{n+1} = 2^{n+1} + 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1.$$

Конечно, у этих формул есть и другие доказательства. Индуктивные доказательства позволяют быстро проверить справедливость равенства, но не позволяют найти правую часть по левой. Для этого нужны другие рассуждения. В частности, справедлива такая теорема:

Теорема 1. *Для любого k сумма $1^k + 2^k + \cdots + n^k$ является многочленом от n степени $k+1$.*

Зная такой факт, уже легко находить формулы для сумм степеней. Попробуйте сделать это для сумм квадратов (и проверьте ваш результат с помощью индуктивного рассуждения).

После того, как разобраны несколько примеров уместно сказать некоторую общую вещь о принципе математической индукции. Дело в том, что в некотором смысле принцип математической индукции – это бесплатное упрощение по сравнению с обычными методами. Действительно, без принципа математической индукции нам нужно доказывать, что для всякого n верно утверждения $A(n)$. Принцип же математической индукции позволяет нам вместо этого доказать две вещи:

0.1. что верно $A(1)$, что есть просто частный случай общего утверждения;

0.2. что для всякого n верно $A(n)$ (то есть, то же самое, что в обычном доказательстве), но уже имея полезное дополнительное предположение, что верно $A(n-1)$.

Таким образом, доказательство по принципу математической индукции всегда не сложнее обычного: доказать надо то же самое, но можно пользоваться бесплатным дополнительным предположением. Другой вопрос, что не всегда на практике дополнительное предположение оказывается полезным.

2 Доказательство неравенств с помощью индукции

Теорема 2 (неравенство Бернулли)**.** $(1+h)^n \geqslant 1+hn$, *если* $1+h \geqslant 0$.

Доказательство. База индукции:

$$1+h \geqslant 1+h.$$

Индуктивный переход: пусть $(1+h)^n \geqslant 1+hn$, тогда

$$(1+h)(1+h)^n \geqslant (1+h)(1+hn) = 1+(n+1)h+h^2n \geqslant 1+(n+1)h,$$

так как $1+h \geqslant 0$. □

Более сложный пример.

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2} < 2.$$

С основанием индукции проблем нет, но индуктивный шаг выполнить напрямую не удается.

Здесь оказывается полезной очень важная идея: доказывать более сильное утверждение. В данном случае мы хотим подобрать такие числа, чтобы они явно суммировались и каждое оценивало обратный квадрат. Используем такое равенство

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} > \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Оценим каждый член по отдельности подходящей разностью. В сумме останется только первая и последняя дробь:

$$1+\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{n^2} < 1+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{(n-1)n}\right) =$$
$$1+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n} = 2-\frac{1}{n} < 2.$$

3 Двоичная система

Задача 3. Доказать, что для всякого n с помощью гирь весов $1,2,4,\ldots,2^{n-1}$ грамм можно уравновесить любой груз от 0 до 2^n-1 грамм.

Проведем индукцию по n. Для $n=1$ утверждение очевидно. Предположим, что утверждение верно для гирь $1,2,4,\ldots,2^{n-1}$. Пусть теперь у нас есть гири $1,2,4,\ldots,2^n$ и нам нужно уравновесить любой груз от 0 до $2^{n+1}-1$ и показать, что это можно сделать единственным образом.

Для грузов веса $k < 2^n$ для начала заметим, что гирю веса 2^n использовать нельзя, она сразу перевесит. А с помощью остальных гирь груз действительно можно уравновесит, причем единственным образом, просто по предположению индукции.

Для груза веса $k \geqslant 2^n$ заметим, что гирю 2^n мы использовать обязаны. Действительно, как мы уже доказывали, суммарный вес всех остальных гирь равен

$$1+2+4+\ldots+2^{n-1} = 2^n-1$$

и его недостаточно, чтобы уравновесить груз. После использования гири 2^n нам остается уравновесить груз $k'=k-2^n$. Поскольку $k' < 2^n$, вновь по предположению индукции мы получаем, что оставшийся груз можно уравновесить оставшимися гирями единственным образом.

Отметим, что по существу мы только что доказали корректность двоичной системы счисления, то есть мы доказали, что каждое натуральное число можно записать в двоичной системе счисления единственным образом. Действительно, гири из предыдущей задачи отвечают разрядам двоичного числа, а то, что мы используем гирю веса 2^l для уравновешивания груза веса k соответствует тому, что в l-ом разряде двоичной записи числа k нужно поставить единицу. Это рассуждение нетрудно провести формально, попробуйте это сделать (а мы сделаем это несколько позднее).

4 Пример из алгебры: существование решения однородной линейной системы уравнений

Теорема 3. *Если количество уравнений в однородной системе линейныых уравнений меньше количества переменных, система имеет ненулевое решение.*

Индукция по числу уравнений. Для одного уравнения очевидно. Это основание индукции.

Индуктивный переход. Выбираем одно из уравнений. Если все коэффициенты нулевые, то очевидный переход. Иначе выбираем ненулевой коэффициент, выражаем соответствующую переменную из выбранного уравнения и подставляем в остальные полученное выражение. Ненулевое решение полученной системы с меньшим числом уравнений продолжается до ненулевого решения исходной системы.

5 Коды Грея

Слово длины n в алфавите A — это последовательность n символов из этого алфавита.

Теорема 4. *Можно так упорядочить все слова длины n, что любые два соседних слова различаются только в одном символе.*

Для слов длины 1 проблем нет: просто перечислим символы алфавита в каком-нибудь выбранном порядке (будем дальше его использовать, заменяя символы алфавита на числа 0, $\dots$, $g-1$).

Теперь упорядочим слова длины $n+1$, предполагая, что уже есть подходящий порядок для слов длины n.

Вначале перечисляем слова, начинающиеся с нуля: $0a$, $\dots$, $0b$. Далее берем слово $1b$ и перечисляем слова, начинающиеся с 1, в обратном порядке для слов длины n. Останавливаемся на слове $1a$, переходим к слову $2a$ и т.д.

6 Ханойская башня

Есть три штырька, на который можно насаживать n дисков разного размера. В начальный момент времени все диски насажены на одном штырьке в порядке убывания размера.

За один ход разрешается переносить верхний в стопке диск на любой другой штырек так, чтобы под ним был диск большего размера.

Требуется перенести всю стопку дисков с одного штырька на другой. Утверждается, что это возможно при любом n.

Доказательство индуктивное. База очевидна (один диск можно переносить на любой штырек).

Индуктивный переход: воспользовавшись предположением индукции, перенесем верхние $n-1$ диск на второй штырек. Потом нижний — самый большой — на третий. И, еще раз воспользовашись предположением индукции, перенесем стопку из $n-1$ диска на второй штырек.

7 Теорема Холла о представителях

Пример: выбор кандидатов на должности.

Теорема 5. *Для семейства множеств есть система различных представителей тогда и только тогда, когда в объединении любых k множеств из семейства лежит не меньше k элементов.*

В одну сторону утверждение теоремы очевидно: если кандидатов на k должностей меньше k, то назначить по одному человеку на должность невозможно. (Принцип кроликов, доказательство тоже по индукции.)

Теперь докажем в другую сторону: если для каждого набора из k должностей есть хотя бы k кандидатов (свойство X), то назначение на должности возможно.

Для удобства рассуждения предположим, что каждый кандидат пишет заявление с просьбой принять его в должность (для каждой должности, на которую он претендует).

Доказательство будет индукцией по сумме числа должностей и числа заявлений. Наименьшее возможное значение суммы равно 2: одна должность, одно заявление. В этом случае утверждение очевидно.

Пусть утверждение доказано для всех ситаций, в которых сумма числа должностей и числа заявлений p. Рассмотрим ситуацию с n должностями, в которой сумма равна p. Разберем по очереди три возможных варианта.

1. Пусть нашелся такой набор из $0 < k < n$ должностей, что кандидатов на эти должности ровно k (назовем эти должности первыми). По индуктивному предположению назначение для этого набора должностей возможно.

Теперь выбросим тех кандидатов, которые уже участвуют в назначении и рассмотрим оставшиеся должности. Для такой ситуации также выполняется свойство X. Пусть на набор из p оставшихся должностей претендуют s кандидатов. Тогда в исходной ситуации на первые k должностей и на эти p должностей претендуют $k + s \geqslant k + p$ кандидатов, т.е. $p \leqslant s$. По индуктивному предположению назначение возможно.

Назначение в исходной ситуации получается объединением назначений в двух полученных наборах должностей.

2. Теперь предполагаем, что каждому набору из $0 < k < n$ должностей отвечает больше k кандидатов. Тут нужно разобрать два случая: (А) каждый кандидат претендует только на одну должность; (Б) есть кандидат R, который претендует хотя бы на две должности.

2А. Тут всё просто: назначаем как угодно, конфликтов не возникает.

2Б. Уговорим кандидата R отказаться от одной из должностей. Получаем ситуацию, в которой сумма должностей и заявлений меньше. А условие X по прежнему выполнено, что позволяет применить индуктивное предположение. В самом деле, рассмотрим какой-нибудь набор из k должностей в новой ситуации. В исходной ситуации на эти должности претендовало по крайней мере $k + 1$ человек. Но снята только одна заявка. Так что в новой ситуации на эти должности претендует по крайней мере k человек.