Лекция 7: графы

Дискретная математика, ВШЭ, факультет компьютерных наук

(Осень 2014 – весна 2015)

1 Какие бывают графы

Неформально граф — это набор точек и линий, соединяющих эти точки. Формальных определений графов много, они задают родственные, но несовпадающие понятия. Нас прежде всего будут интересовать те графы, которые называются *простыми неориентированными*.

Простой неориентированный граф — это пара множеств (V, E) (множество вершин и множество рёбер), причём

$$E \subseteq \{\{v_1, v_2\} \mid v_1, v_2 \in V, v_1 \neq v_2\}.$$

Каждое ребро $\{v_1, v_2\}$ имеет два конца — v_1 и v_2, которые по определению различны.

На рисунке изображены некоторые графы на 5 вершинах.

Рис. 1: Путь P_5

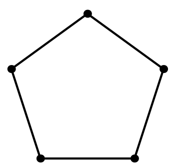

Рис. 2: Цикл C_5

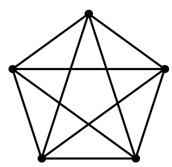

Рис. 3: Полный граф K_5

Аналогичные графы определяются для любого количества вершин. В частности, *полный граф* K_n имеет n вершин и наибольшее возможное множество рёбер: любая пара вершин связана в K_n ребром.

Вершины *пути* P_n можно занумеровать числами от 0 до $n - 1$ так, чтобы ребра соединяли вершины с номерами i, $i + 1$ при $0 \leqslant i < n$. *Длиной пути* называется количество рёбер в нём. Путь P_5 имеет длину 4: такая вот особенность терминологии.

Вершины *цикла* C_n можно занумеровать числами от 0 до $n - 1$ так, чтобы ребра соединяли вершины с номерами i, $i + 1$ при $0 \leqslant i < n$ и вершины с номерами 0, $n - 1$.

Степенью вершины $d(v)$ в графе называется количество рёбер, для которых эта вершина является концом. Между степенями вершин графа есть соотношения.

Задача 1 (старинная олимпиадная задача)**.** Докажите, что нет такого графа на 77 вершинах, что степень каждой вершины равна 15.

Решать эту задачу можно по-разному. Одно из решений использует такое соотношение между степенями вершин.

Лемма 1. $\sum_{v \in V} d(v) = 2E$, *где E — количество рёбер в графе.*

Доказательство. Это соотношение получается, если двумя способами посчитать количество концов рёбер в графе.

Каждая вершина является концом для $d(v)$ рёбер. Поэтому количество концов равно левой части равенства.

У каждого ребра ровно 2 конца, поэтому количество концов равно правой части равенства. □

Следствие 1. *Количество вершин нечётной степени в графе чётно.*

Леммой 1 ограничения на степени вершин не исчерпываются.

Задача 2. Докажите, что во всяком графе, в котором есть хотя бы две вершины, найдутся две вершины одинаковой степени.

Задача 3. Докажите, что не существует графа с пятью вершинами, степени которых равны 4, 4, 4, 4, 2.

Впрочем, препятствия к существованию *регулярных графов* (т.е. таких графов, у которых степени всех вершин равны) исчерпываются леммой 1.

Задача 4. Докажите, что при любых $0 \leqslant k \leqslant n$ таких, что kn — чётное, существует граф на n вершинах, степени которого равны k.

Ориентированный граф (или коротко: орграф) — это пара множеств (V, E), где $E \subseteq V \times V$, причём среди элементов E нет пар вида (v, v). Графически принято изображать ребро $(v_1, v_2) \in E$ как стрелку, ведущую из точки v_1 (начало ребра) в точку v_2 (конец ребра).

На рисунке изображены некоторые орграфы на 5 вершинах.

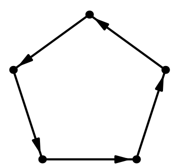

Рис. 4: Ориентированный цикл на 5 вершинах

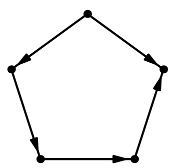

Рис. 5: Это не ориентированный цикл

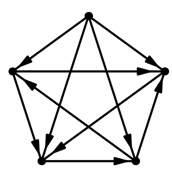

Рис. 6: Турнир на 5 вершинах

Обратите внимание, что ориентированным циклом называется орграф, в котором направление стрелок согласовано. *Турниром* называется орграф, в котором любая пара разных вершин связана ровно одним ребром. Название такого орграфа связано с тем, что он представляет результаты кругового турнира (если ничьих не бывает).

В орграфе концы рёбер различаются. Поэтому для вершины в орграфе определены две степени: *входная степень* $d_-(v)$ — количество рёбер, которые заканчиваются в v, и *выходная степень* $d_+(v)$ — количество рёбер, которые начинаются в v. Например, в ориентированном цикле входная и выходная степени каждой вершины равны 1.

Соотношение леммы (1) для орграфов принимает другой вид

$$\sum_v d_-(v) = \sum_v d_+(v) \tag{1}$$

(у каждого ребра есть начало и конец, левая часть считает концы рёбер, а правая — начала). Соотношения (1) не исчерпывают ограничения на степени вершин в орграфе.

Задача 5. Докажите, что не существует такого орграфа на 5 вершинах, что выходные степени трёх вершин равны 3, а двух вершин равны 0, и входные степени трёх вершин равны 3, а двух вершин равны 0.

Орграфами удобно задавать бинарные отношения между одними и теми же элементами, например, отношения порядка. Чтобы отношение E можно было задать орграфом, оно должно быть антирефлексивным $(v, v) \notin E$.

Как мы помним, таким свойством обладают отношения строгого порядка. Скажем, отношение строгого линейного порядка задаётся некоторым турниром. Но не всякий турнир задаёт отношение порядка (например, ориентированный цикл не задаёт отношение порядка).

Граф называется *двудольным*, если множество вершин можно так разбить на пару непересекающихся множеств $V = L \cup R$, что $E \subseteq \{\{v_1, v_2\} \mid v_1 \in L, v_2 \in R\}$.

Легко видеть, что двудольные графы – это по существу тот же объект, что и бинарные отношения. Действительно отношению $R \subseteq A \times B$ можно сопоставить граф с множеством вершин $A \cup B$ и множеством рёбер $\{\{a, b\} \mid R(a, b)\}$ и наоборот.

Задача 6. *Булевым кубом* Q_n назовём граф, вершины которого — двоичные слова длины n, а рёбра связывают вершины, которые различаются только в одной позиции (пример: 00101 и 01101).

Докажите, что Q_n — двудольный.

В некоторых случаях удобны бывают графы, в которых допускаются *петли* (рёбра вида (v, v)) или кратные ребра (несколько рёбер имеют общие начала и концы). Мы такие графы пока рассматривать не будем.

Далее под словом «граф» мы понимаем простой неориентированный граф, если явно не указано что-то иное.

2 Подграфы

В отличие от множеств для графов есть два разных способа определить подграф. Первый (его мы и будем использовать по умолчанию) состоит в том, что мы выбираем подмножество вершин и какие-то ребра между ними. Получившийся граф называют *подграфом*. Второй способ состоит в том, что выбирается подмножество вершин и все ребра графа между этими вершинами. Такой подграф обычно называют *индуцированным подграфом*. Наконец, иногда подграфом называют такой граф, у которого сохранены все вершины исходного, а из рёбер оставлено только некоторое подмножество. Такие подграфы называют *рёберными*.

Важно помнить про разницу между этими понятиями. Например, в полном графе K_5 есть подграф C_5 (цикл). Но индуцированного подграфа C_5, конечно же, нет.

Задача 7. (а) Сколько индуцированных подграфов на 5 вершинах имеет граф K_5?

(б) Сколько подграфов имеет на 5 вершинах имеет граф K_5?

Кликой называется полный подграф. Другими словами, клика — это такое подмножество вершин графа, каждая пара которых связана ребром.

Дополнительным понятием является *независимое множество*. Это такое множество вершин графа, никакая пара которых не связан ребром. Другими словами, независимое множество — это индуцированный подграф $\bar{K}_n$. Тут мы используем определение дополнительного графа. Граф $\bar{G}$ имеет то же множество вершин, что и граф G, но рёбра и нерёбра меняются местами $\{u, v\} \in E(\bar{G})$ тогда и только тогда, когда $\{u, v\} \notin E(G)$.

Задача 8. Сколько независимых множеств размера 7 есть в цикле C_{16}?

Задача 9. Верно ли, что в булевом кубе Q_4 есть ровно 16 независимых множеств размера 7?

В двудольном графе вершины каждой доли образуют независимое множество. С другой стороны, вершины доли L (как и вершины доли R) обладают таким свойством: у любого ребра в двудольном графе один из концов лежит в L.

Вершинным покрытием называется такое множество вершин S, что для любого ребра один из концов лежит в S.

Задача 10. Докажите, что S — вершинное покрытие тогда и только тогда, когда $V \setminus S$ — независимое множество.

3 Правильные раскраски

Правильной раскраской графа $G(V, E)$ в k цветов называется такая функция $c\colon V \to \{1, \dots, k\}$, что для любого ребра $\{u, v\} \in E$ выполняется неравенство $c(u) \neq c(v)$ (цвета концов ребра различны). Номера цветов в этом определении условны.

Задача 11. Найдите все графы, для которых есть правильная раскраска в 1 цвет.

Задача 12. Докажите, что цикл C_5 нельзя правильно раскрасить в два цвета.

Любой двудольный граф можно правильно раскрасить в два цвета: красим одну долю в один цвет, а другую — в другой. Верно и обратное: если граф раскрашен в два цвета, он двудольный (доли образуют вершины одинакового цвета).

Оказывается, в задаче 12 указано единственное существенное препятствие к 2-раскрашиваемости графа.

Теорема 1. *Граф можно правильно раскрасить в* 2 *цвета тогда и только тогда, когда в нём нет циклов нечётной длины.*

Доказательство. Пусть граф правильно раскрашен в два цвета. Возьмём какой-нибудь его цикл. Он тоже правильно раскрашен в два цвета, т.е. цвета вершин вдоль цикла чередуются. Значит, в цикле чётное количество вершин.

Пусть в графе нет циклов нечётной длины. Покрасим его вершины в 2 цвета таким способом.

Выберем произвольную вершину и покрасим её в цвет 0. Всех соседей этой вершины покрасим в цвет 1 и назовём потомками исходной вершины (а исходная вершина — предок каждого своего потомка). Продолжаем этот процесс: соседей вершины u цвета x красим в цвет $1 - x$ и называем потомками u.

Если у вершин, которым уже приписаны цвета, не осталось непокрашенных соседей, выбираем любую из непокрашенных вершин, красим её в цвет 0 и продолжаем раскраску.

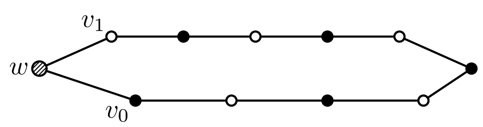

Рис. 7: Препятствие к 2-раскраске выделяет цикл нечётной длины

Такой процесс рано или поздно закончится (вершин конечное количество). Либо все вершины будут покрашены и тогда раскраска правильная по построению. Либо какую-то вершину w покрасить не удастся, потому что она соседствует с уже покрашенными в два разных цвета вершинами v_0, v_1.

Наша цель доказать, что второй случай невозможен. У каждой покрашенной вершины есть ровно один предок. Поднимаясь от предка к предку от двух вершин цветов 0 и 1, которые соседствуют с вершиной w, мы придём к их общему предку. Поскольку цвета предков и потомков чередуются, длины путей к общему предку будут иметь разную чётность. Получаем нечётный цикл: w, v_0, путь к общему предку, затем путь от общего предка к v_1 и опять w. □

Вопрос о существовании правильной раскраски в 3 и более цветов гораздо сложнее. Простых критериев существования таких раскрасок нет.

Задача 13. Можно ли правильно раскрасить в 3 цвета вершины графов, изображённых на рисунке 8?

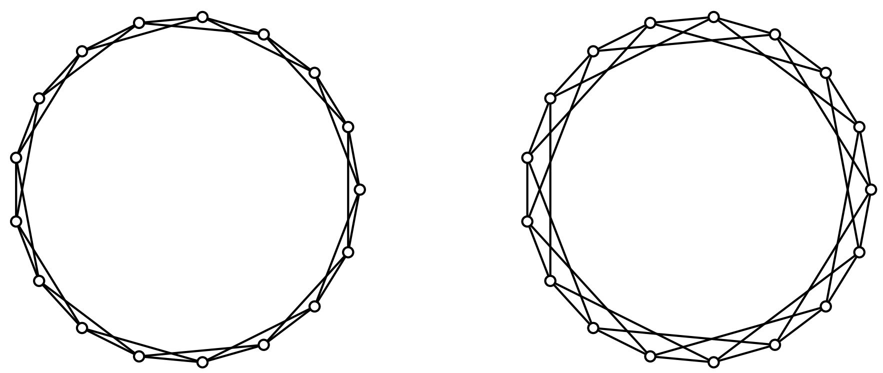

Рис. 8: Графы $(17; 1, 2)$ и $(17; 1, 3)$

Дополнительно: теорема Рамсея

Задача 14 (старинная олимпиадная задача)**.** Докажите, что в любой группе из 6 человек найдётся или трое попарно знакомых, или трое попарно незнакомых.

(Отношение знакомства предполагается симметричным.)

Решение. Начнём с более простого наблюдения: любые два человека или знакомы, или незнакомы.

Более сложное наблюдение: среди любых трёх человек есть или пара знакомых, или тройка незнакомых. Верно и симметричное утверждение: есть или тройка знакомых, или пара незнакомых.

Теперь рассмотрим группу из 6 человек. Выберем одного из них, назовём его Антоном. У Антона есть или три знакомых, или три незнакомых. Случаи аналогичны, пусть есть трое знакомых. Среди этой тройки есть или пара знакомых (пусть это Борис и Виктор), или все они между собой незнакомы. В первом случае получаем, что Антон, Борис и Виктор попарно знакомы между собой. Во втором трое знакомцев Антона попарно незнакомы между собой. □

Как всегда, когда речь идёт о симметричном отношении, эту задачу легко пересказать на языке графов. Фактически мы проверили, что в любом графе на 6 вершинах есть или клика размера 3, или независимое множество размера 3. При этом в решении мы использовали похожие факты: ($R(2,2) = 2$): в графе с 2 вершинами есть или клика размера 2, или независимое множество размера 2, ($R(2,3) = 3$, $R(3,2) = 3$): в графе не 3 вершинах есть или клика размера 2, или независимое множество размера 3 (а также симметричное утверждение).

Все эти утверждения можно объединить в одно.

Теорема 2 (теорема Рамсея)**.** *Для любых k, n найдётся такое число $R(k,n)$, что в любом графе на $R(k,n)$ вершинах есть или клика размера k, или независимое множество размера n.*

Ясно, что если утверждение теоремы справедливо для графа на R вершинах, то оно справедливо и для графов с $N > R$ вершинами. Поэтому обычно под $R(k,n)$ понимают минимальное число вершин, для которого справедлива теорема.

Доказательство. Мы продолжим рассуждение, намеченное в решении задачи 14.

Предположим, что для пар $(k-1, n)$ и $(n, k-1)$ утверждение теоремы выполнено. Рассмотрим граф на $R(k-1,n) + R(k,n-1)$ вершинах и какую-то его вершину a. У этой вершины есть или $R(k-1,n)$ соседей, или $R(k,n-1)$ вершин, не связанных с a ребром. Оба случая аналогичны, рассмотрим первый.

В индуцированном соседями вершины a подграфе по предположению найдётся или клика размера $k-1$, или независимое множество размера n. В первом варианте добавление вершины a даёт клику в исходном графе размера k, во втором варианте в исходном графе есть независимое множество размера n.

Теперь применим индукцию по фундированному порядку на $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, заданному покоординатным сравнением. □

Из доказательства теоремы мы получаем неравенство для чисел Рамсея

$$R(k,n) \leqslant R(k-1,n) + R(k,n-1),$$

которое напоминает рекуррентное соотношение для биномиальных коэффициентов. Поскольку $R(1,n) = R(k,1) = 1$, то легко убедиться, что

$$R(k,n) \leqslant \binom{k+n-2}{k-1}.$$

4 Компоненты связности

На множестве вершин графа определим отношение достижимости: $R(x, y)$ истинно, если из вершины x можно добраться до вершины y, передвигаясь по рёбрам графа. Можно представлять себе вершины как города, а рёбра как дороги, тогда достижимость означать возможность проехать по этим дорогам из одного города в другой. Ясно, что отношение достижимости является отношением эквивалентности:

- чтобы попасть из вершины x в неё саму, даже не нужно никуда идти (рефлексивность)
- если мы можем пройти по рёбрам графа из вершины x в вершину y, то, пройдя по тем же рёбрам в обратном порядке, мы попадём из вершины y в вершину x (симметричность);
- если мы можем пройти из вершины x в вершину y, а из вершины y в вершину z, то можно пройти из вершины x в вершину z: сначала по первому маршруту идём в вершину y, а затем по второму маршруту в вершину z (транзитивность).

Следовательно, вершины графа разбиваются на классы эквивалентности относительно отношения достижимости. Эти классы эквивалентности называются *компонентами связности* графа. При этом две вершины лежат в одной компоненте тогда и только тогда, когда из одной можно дойти до другой по рёбрам графа.

Граф называется *связным*, если в нём только одна компонента связности, то есть если из любой вершины можно пройти в любую, идя по рёбрам.

Выше мы приводили как раз примеры связных графов. Простейший пример несвязного графа — такой граф, в котором множество рёбер пусто. Другими словами, это *дополнение к полному графу* $\bar{K}_n$.

Теорема 3. *В связном графе с n вершинами не меньше $n - 1$ рёбер.*

Доказательство. Будем добавлять рёбра по одному. Вначале нет ни одного ребра, и есть n связных компонент (каждая вершина — своя компонента). Добавление одного ребра либо не меняет числа компонент (если это ребро соединяет две вершины одной компоненты), либо уменьшает это число на единицу (если ребро соединяет две вершины разных компонент, то эти компоненты сливаются в одну). В конце — когда все рёбра добавлены и получился связный граф — у нас только одна связная компонента. Значит, число связных компонент уменьшалось не меньше $n - 1$ раз. □

5 Деревья

Оценка теоремы 3 достигается. Действительно, добавляя каждый раз ребро с концами в разных компонентах, получаем после добавления $n - 1$ ребра связный граф.

Определение 1. Связный граф с n вершинами и $n - 1$ ребром называется *деревом.*

Из леммы 1 получаем такое следствие для деревьев.

Задача 15. В дереве с хотя бы двумя вершинами есть по крайней мере две вершины степени 1.

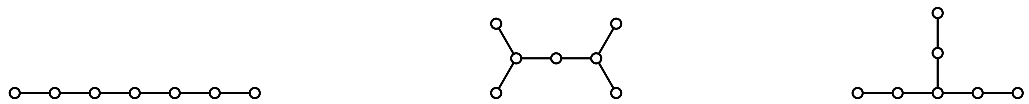

Рис. 9: Лес — это граф, каждая компонента связности которого является деревом

Вершины степени 1 называются *висячими*. Иногда в дереве выделяют особую вершину — *корень*. Тогда висячие вершины, отличные от корня, называют *листьями*.

Пример 1. Рассмотрим граф, вершины которого являются двоичными словами длины $\leqslant n$, а рёбра имеют вид $\{u, u0\}$ или $\{u, u1\}$. Такой граф является деревом. Действительно, он связный: от любого слова можно перейти к любому, стирая последний символ или дописывая символ к концу слова.

Посчитаем количество ребер. Для этого удобно ввести на рёбрах ориентацию и считать, что более короткий конец ребра является его началом, а более длинный — его концом. Начал рёбер столько же, сколько всего рёбер. Это количество равно удвоенному числу двоичных слов длины меньше n (каждое такое слово является началом двух рёбер), т.е.

$$2 \cdot (1 + 2 + \cdots + 2^{n-1}) = 2^{n+1} - 2.$$

Количество вершин в таком графе равно количеству слов длины не больше n, т.е. $2^{n+1}-1$. Таким образом, этот граф является деревом.

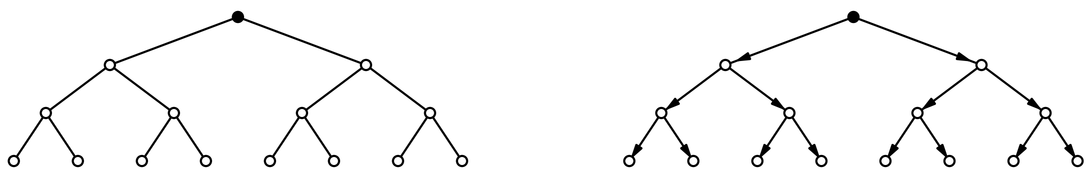

Рис. 10: Полное бинарное дерево глубины 3

В полном бинарном дереве глубины n естественно выделяется корень — вершина λ (пустое слово). Количество листьев равно 2^n.

В общем случае *глубиной корневого дерева* называется максимальная длина пути, один из концов которого – корень.

Задача 16. Пусть в дереве k листьев и нет вершин степени 2. Докажите, что количество вершин дерева меньше $2k$.

Для деревьев есть несколько равносильных определений. Начнём с того, что охарактеризуем деревья не через добавление, а через выбрасывание рёбер.

Определение 2. Граф называется *минимально связным*, если он связен, но после выбрасывания любого ребра перестаёт быть связным.

Теорема 4. *Деревья — это в точности минимально связные графы.*

Доказательство. Дерево — минимально связный граф. Это лёгкое следствие теоремы 3: все графы с n вершинами и $\leqslant n-2$ рёбрами несвязны.

Из доказательства теоремы 3 можно также заметить, что при удалении одного ребра из связного графа получается не более двух компонент связности.

Минимально связный граф — дерево.

Докажем индукцией по числу вершин. База $n = 1$ выполняется: рёбер вообще нет, так что удаление любого ребра делает граф несвязным.

Индуктивный переход. Пусть утверждение доказано для минимально связных графов с количеством вершин $< n$. Рассмотрим минимально связный граф на n вершинах. Удалим одно из его рёбер. Получим две компоненты связности, обозначим количества вершин в них $n_1 < n$ и $n_2 < n$. Каждая компонента является минимально связным графом. Действительно, если бы удаление какого-то ребра сохраняло бы связность одной из компонент, то удаление того же ребра в исходном графе сохраняло бы его связность. К каждой компоненте применимо предположение индукции, поэтому в них $n_1 - 1$ и $n_2 - 1$ рёбер соответственно.

Значит, всего в графе $(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + 1 = n - 1$ рёбер (рёбра в обоих компонентах плюс выброшенное ребро). Таким образом, предположение индукции доказано и для минимально связных графов с n вершинами. □

Подграф называется *остовным*, если его множество вершин совпадает с множеством вершин самого графа. Из теоремы 4 получаем такое следствие.

Следствие 2. *В любом связном графе есть остовное дерево.*

Задача 17 (трудная)**.** Докажите, что количество остовных деревьев в полном графе K_n равно n^{n-2} при $n \geqslant 2$.

Деревья также можно охарактеризовать через пути и циклы.

Теорема 5. *Следующие свойства связного графа на n вершинах равносильны:*

1) *графе — дерево;*

2) *в графе нет циклов;*

3) *между любыми двумя различными вершинами графа есть ровно один путь.*

Из этой теоремы следует, что деревья можно определять как связные графы без циклов или как графы, в которых между любой парой различных вершин есть ровно один путь.

Доказательство. Будем доказывать равносильность отрицаний указанных свойств для связных графов.

Если в графе есть два разных пути с одинаковыми концами, то в нем есть цикл. Пусть между вершинами u и v есть два разных пути. Пойдём из вершины u до первой вершины x, в которой пути расходятся. Дальше пойдём по второму пути до первой вершины y, которая лежит на обоих путях. Отрезки второго пути от x до y и первого пути y до x образуют цикл. (См. рисунок 11.)

Если в связном графе есть цикл, то он не минимально связный. Действительно, удаление любого ребра из цикла оставляет граф связным. Если какой-то маршрут из вершины u в вершину v проходил через удалённое ребро, заменим это ребро на путь по остальным рёбрам цикла. (См. рисунок 12.)

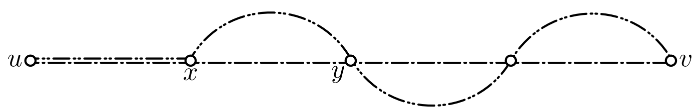

Рис. 11: Цикл из двух разных путей

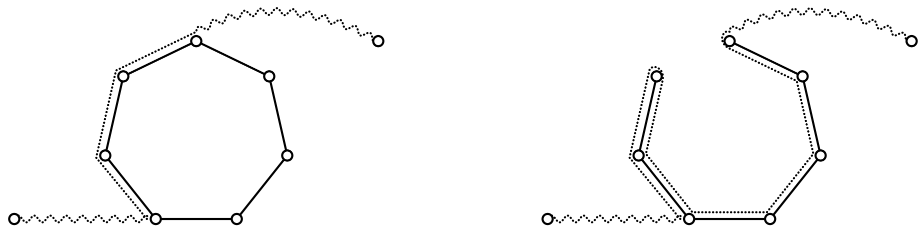

Рис. 12: Удаление ребра из цикла сохраняет связность

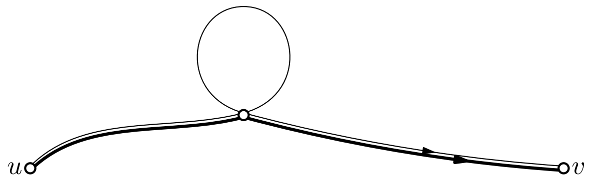

Рис. 13: Кратчайший маршрут проходит по пути

Если в связный граф не минимально связный, то в нем есть два пути с одинаковыми концами. Пусть после выбрасывания ребра с концами u и v граф остаётся связным.

Рассмотрим маршрут из u в v по оставшимся рёбрам и начнём последовательно удалять те его части, которые начинаются и заканчиваются в одной вершине. Рано или поздно такие повторы закончатся и получим путь с концами u и v. (См. рисунок 13.) □

Задача 18. Обозначим через $d(u, v)$ длину кратчайшего пути с концами в вершинах u и v. Это число называется *расстоянием* между вершинами на графе. Докажите неравенство треугольника

$$d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$$

для расстояния на графе.

Диаметром графа называется наибольшее расстояние между его вершинами.

Задача 19. Найдите диаметр полного бинарного дерева глубины n.

Задача 20. Докажите, что диаметр булева куба Q_n равен n. Есть ли в булевом кубе Q_n связный подграф диаметра 2^{n-1}?

6 Эйлеровы циклы

Вы уже могли заметить, что терминология в математике не всегда согласована, а иногда одним и тем же словом называются разные вещи. Сейчас мы в очередной раз столкнёмся с таким примером. Эйлеровы циклы, о которых пойдёт речь, — это не циклы!

Определение 3. Маршрут по рёбрам графа называется *эйлеровым циклом*, если он замкнутый (начинается и заканчивается в одной и той же вершине) и проходит по каждому ребру ровно один раз.

Эйлеров цикл в орграфе — это такой замкнутый маршрут, который идёт по направлению рёбер (то есть по ребру с началом в u и концом в v маршрут идёт от u к v) и проходит по каждому ребру ровно один раз.

Существование эйлерова цикла в графе легко характеризуется через степени его вершин.

Теорема 6. *В связном графе есть эйлеров цикл тогда и только тогда, когда степени всех его вершин четны.*

Доказательство. Пусть в графе есть эйлеров цикл. Представим, что мы двигаемся вдоль этого цикла. Рассмотрим какую-нибудь вершину графа. Мы столько же раз войдём в вершину, сколько и выйдем из неё. При этом на каждом ребре мы побываем ровно один раз. Поэтому вершина является концом для чётного числа рёбер.

В обратную сторону будем доказывать индукцией по числу рёбер в графе. Наименьшее число рёбер в графе с чётными степенями вершин имеет граф K_3 (он же C_3). Для него, как и для любого цикла, существование эйлерова цикла очевидно.

Пусть мы доказали утверждение для всех связных графов с чётными степенями с количеством рёбер меньше E. Рассмотрим связный граф с E рёбрами, степени всех вершин которого четны.

Начнём двигаться по рёбрам графа. Проходя по ребру, мы его закрасим, а в качестве следующего ребра маршрута берём ещё незакрашенное ребро (чтобы не пройти по одному и тому же ребру дважды). Рано или поздно мы остановимся в вершине, в которой не найдётся ни одного незакрашенного ребра для продолжения маршрута.

Заметим, что при каждом проходе через вершину мы закрашиваем два ребра, поэтому количество незакрашенных рёбер с концами в этой вершине остаётся чётным. Поэтому остановиться мы можем только в той вершине, с которой начали движение.

Полученный замкнутый маршрут не обязательно является эйлеровым циклом, так как по каким-то рёбрам мы могли не пройти ни разу (см. рисунок 14).

Но можно утверждать, что в графе, составленном из незакрашенных рёбер, все вершины имеют чётную степень. Количество рёбер в каждой компоненте связности такого графа меньше E, поэтому по предположению индукции в каждой компоненте связности есть эйлеров цикл.

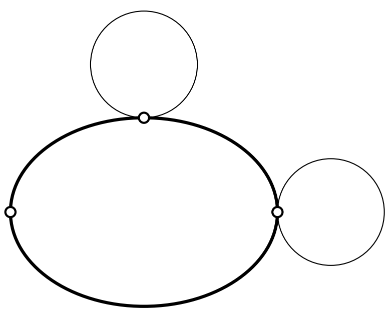

Рис. 14: Неудачная попытка построить эйлеров цикл

Ещё заметим, что поскольку исходный граф был связным, наш закрашенный маршрут проходит через вершины всех компонент связности графа незакрашенных рёбер.

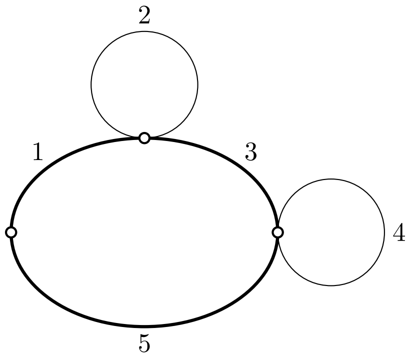

Рис. 15: Комбинированный эйлеров цикл

Теперь составим эйлеров цикл во всём исходном графе следующим образом: двигаемся по закрашенному маршруту; каждый раз когда встречаем не пройденную ещё компоненту связности графа незакрашенных рёбер, обходим её по эйлерову циклу для этой компоненты (см. рисунок 15). □

Графы, в которых есть эйлеров цикл, называют эйлеровыми графами. В предыдущей теореме мы дали полное описание эйлеровых графов. А что можно сказать про эйлеровы орграфы?

Во-первых, легко сообразить, каким условием должно замениться условие чётности степеней вершин: для каждой вершины входная и выходная степени равны. Но этого недостаточно: ведь в неориентированном случае мы ещё требовали связности графа. Чем заменится это условие в ориентированном случае? Оказывается, достаточно потребовать, чтобы был связным неориентированный граф, получаемый из ориентированного стиранием всех стрелок. Такие орграфы называют *слабо связными.*

Сильно связный орграф обладает тем свойством, что из любой вершины можно добраться в любую другую, двигаясь по рёбрам в правильном направлении. Заметим, что эйлеров граф сильно связный: из любой вершины можно достичь любую другую, двигаясь по эйлерову циклу. Но слабой связности уже достаточно.

Теорема 7. *Орграф эйлеров тогда и только тогда, когда он слабо связен и в каждой вершине входная степень равна выходной степени.*

Доказательство. Мы хотим повторить доказательство предыдущей теоремы с минимальными изменениями. В одну сторону — эйлеров граф обладает указанными свойствами — ничего не меняется.

Доказательство обратного утверждения по-прежнему проводится индукцией по числу рёбер. База индукции — ориентированный цикл на трёх вершинах (это единственный орграф с тремя рёбрами, удовлетворяющий условиям теоремы, а орграфы с двумя рёбрами не удовлетворяют условиям).

Построение закрашенного пути точно такое же. Только нужно добавить, что двигаемся мы по направлениям рёбер. Остальная часть доказательства остаётся без изменений. □

Дополнительно: изоморфизм графов

Графы $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ называются *изоморфными*, если существует такая биекция $\pi\colon V_1 \to V_2$, которая переводит множество рёбер первого графа в множество рёбер второго графа, т.е. $\{u, v\} \in E_1$ равносильно $\{\pi(u), \pi(v)\} \in E_2$.

Изоморфизм сохраняет все свойства графов, которые выражаются в терминах вершин и рёбер и не используют дополнительной информации о множестве вершин. Все свойства, которые мы обсуждали выше, именно таковы. Такие свойства называются *инвариантными*.

Для различения графов (доказательства их неизоморфности) часто бывает достаточно указать какое-нибудь инвариантное свойство, которое есть у одного графа и которого нет у другого графа: число вершин, число рёбер, максимальная степень вершины, набор степеней вершин (неупорядоченный), связность и т.п. Иногда нужно рассматривать более изощрённые свойства.

Пример 2. Два графа на рис. 16 неизоморфны. Оба графа — деревья, наборы степеней

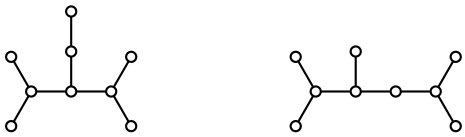

Рис. 16: два неизоморфных дерева

вершин которых одинаковы и равны $(3, 3, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 1)$. Однако соседи у вершины степени 2 в одном графе имеют степени 3, 3, а в другом — 3, 1. Изоморфизм должен сохранять степени вершин, поэтому вершина степени 2 перейдёт при изоморфизме в вершину степени 2. Её соседи также должны перейти в соседей образа, а это невозможно.

Различающие неизоморфные графы свойства могут быть ещё сложнее, как в следующей задаче.

Задача 21. Докажите, что графы на рис. 17 неизоморфны.

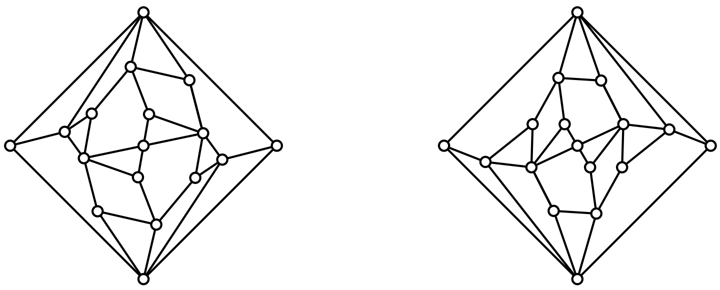

Рис. 17: ещё пара неизоморфных графов

В общем случае проверка изоморфизма, хотя и упрощается проверкой некоторых инвариантных свойств, требует перебора значительного количества вариантов.