

1. Докажите, что для любого целого положительного n выполняется

а) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$;

б) $1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + n \cdot 2^n = (n - 1) \cdot 2^{n+1} + 2$;

в) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^n} > \frac{n}{2} + 1$.

2. Докажите, что 1 можно представить в виде суммы 2014 различных обыкновенных дробей с числителем 1 и положительным знаменателем.

3. На доске написаны сто цифр — нули и единицы (в любой комбинации). Разрешается выполнять два действия:

а) заменять первую цифру (ноль на единицу и наоборот);

б) заменять цифру, стоящую после первой единицы.

Докажите, что после нескольких таких замен можно получить любую комбинацию из 100 нулей и единиц.

4. На краю пустыни имеется большой запас бензина и машина, которая при полной заправке может проехать 50 километров. Имеются (в неограниченном количестве) канистры, в которые можно сливать бензин из бензобака машины и оставлять на хранение (в любой точке пустыни). Доказать, что машина может проехать любое расстояние. (Канистры с бензином возить не разрешается, пустые можно возить в любом количестве.)

5. Из целых чисел от 1 до $2n$ выбрано $n + 1$ число. Докажите, что среди выбранных чисел найдутся два, одно из которых делится на другое.

6. а) Докажите, что любой квадрат $2^n \times 2^n$, из которого вырезана угловая клетка, можно разрезать на уголки из трех клеток.

б) Докажите, что на уголки можно разрезать любой квадрат $2^n \times 2^n$, из которого вырезана любая (не обязательно угловая) клетка.

7*. Целые положительные числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ таковы, что $a_k \leq k$ и сумма всех этих чисел четна и равна $2S$. Докажите, что эти числа можно разбить на две группы, сумма по каждой из которых равна S .

8*. Лабиринтом называется клетчатый квадрат 10×10 , некоторые пары соседних узлов в котором соединены отрезком — «стеной» — таким образом, что переходя из клетки в соседнюю по стороне клетку и не проходя через стены, можно посетить все клетки квадрата. Границу квадрата будем также считать обнесенной стеной. В некоторой клетке некоторого лабиринта стоит робот. Он понимает 4 команды — Л, П, В, Н, по которым соответственно идет влево, вправо, вверх и вниз, а если перед ним «стена», то стоит на месте. Как написать программу для робота, выполняя которую он обойдет все клетки независимо от лабиринта и от своего начального положения?

1. Докажите равенства

а) $1 \cdot (n-1) + 2 \cdot (n-2) + \dots + (n-1) \cdot 1 = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$;

б) $\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} - \frac{1}{2}$.

2. Докажите неравенства

а) $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n} > \frac{2}{3} \cdot n\sqrt{n}$;

б) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{n}}$.

3. На кольцевой дороге стоит некоторое количество одинаковых автомобилей. Суммарное количество бензина в их бензобаках достаточно, чтобы один автомобиль мог совершить полный круг. Докажите, что найдется автомобиль, который, начав двигаться против часовой стрелки и забирая бензин по ходу движения у стоящих на дороге автомобилей, сможет совершить полный круг.

4. В зачете участвовало несколько студентов и преподавателей. Известно, что в комнату, где происходил зачет, каждый участник зачета вошел лишь однажды и что каждый преподаватель поговорил с каждым студентом. Докажите, что в какой-то момент зачета в комнате присутствовали либо все студенты (и, может быть, кто-то из преподавателей), либо все преподаватели (и, может быть, кто-то из студентов).

5. В прямоугольнике $3 \times n$ стоят фишки трех цветов, по n штук каждого цвета. Докажите, что можно переставить фишки в каждой строке так, чтобы в каждом столбце были фишки всех цветов.

1. Сколько есть 6-значных чисел, в записи которых есть хотя бы одна чётная цифра?
2. 4 человека должны унести 9 различных предметов. Сколькими способами это можно сделать, если каждый способен унести любое количество имеющихся предметов?
3. 2 человека должны унести 8 различных предметов. Сколькими способами это можно сделать, если каждый готов взять 4 предмета?
4. Сколькими способами можно выстроить 8 человек в очередь так, чтобы Иванов, Петров и Сидоров стояли рядом?
5. Сколько имеется 4-значных чисел, у которых каждая следующая (слева направо) цифра больше предыдущей?
6. Сколькими способами можно образовать 6 пар из 12 человек?
7. Сколькими способами можно разделить 15 одинаковых монет между 7 нумизматами так, чтобы каждому досталось хотя бы по монете?
8. Сколькими способами можно выбрать 6 чисел от 1 до 15, чтобы среди них не было двух, отличающихся на единицу?
9. Докажите равенства (предпочтительнее комбинаторное доказательство)

а)
$$\sum_{i=0}^n i \binom{n}{i} = n2^{n-1};$$

б)
$$\sum_{k=0}^n \binom{d+k}{d} = \binom{d+1+n}{d+1}.$$

10. Разложением числа n называется такая последовательность положительных целых чисел $x_1, x_2, \dots, x_k$, что $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$. Найдите количество разложений n на нечетные слагаемые.
11. Разбиением числа n на k частей называется такая невозрастающая последовательность положительных целых чисел $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k$, что $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = n$. Найдите рекуррентное соотношение для $p_k(n)$ — количества разбиений числа n на k частей.
- 12*. Сколькими способами можно разрезать правильный n -угольник на треугольники, проводя диагонали?
- 13*. Сколько есть таких последовательностей целых чисел $a_1, \dots, a_n$, что $a_1 = 0$ и $0 \leq a_{i+1} \leq a_i + 1$ для $1 \leq i < n$?
14. Чего больше, разбиений числа N на не более чем k слагаемых, или разбиений числа $N + k$ на ровно k слагаемых?
15. Чего больше, разбиений N на слагаемые, не превосходящие k , или разбиений N на не более чем k слагаемых?
- 16*. Чего больше, разбиений n на различные слагаемые или на нечетные слагаемые?
17. Докажите, что количество способов расставить n ферзей на доске $n \times n$ так, чтобы ни один ферзь не бил другого, чётно.
- 18*. Рассмотрим правильный $2n$ -угольник. Сколькими способами можно разбить его вершины на пары так, чтобы отрезки, соединяющие парные вершины, не пересекались?

1. Сколькими способами можно расставить в ряд 10 различных чисел так, чтобы наибольшее и наименьшее из них стояли рядом?
2. Сколькими способами можно выписать в ряд цифры от 0 до 9 так, чтобы четные цифры шли в порядке возрастания, а нечетные — в порядке убывания?
3. 3 человека должны унести 9 различных предметов. Сколькими способами это можно сделать, если каждый готов взять 3 предмета?
4. Сколько имеется 7-значных чисел, у которых каждая следующая (слева направо) цифра не больше предыдущей?
5. Докажите равенство

$$\sum_{0 \leq k \leq (n+1)/2} \binom{n-k+1}{k} = F_{n+2}.$$

6. Докажите, что прямоугольник $2 \times n$ можно разрезать на прямоугольники 1×2 ровно F_{n+1} способами.
7. Какие строки в треугольнике Паскаля состоят только из нечетных чисел?

1. Докажите тождества

а) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;

б) $B \cup (A \setminus B) = A \cup B$;

в) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$;

г) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

2. Докажите, что

$$(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \triangle (B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2) \cup \dots \cup (A_n \triangle B_n)$$

для любых множеств A_i, B_i .

3. Докажите, что если какое-то равенство, содержащее переменные для множеств и операции $\cap, \cup, \setminus$, неверно, то можно найти контрпример к нему, в котором множества пусты или состоят из одного элемента.

4. Докажите полноту системы связок, состоящей из одной связки *штрих Шеффера* $x \mid y = \neg(x \wedge y)$.

5. Является ли полной система связок

а) $\{\wedge, \vee, \setminus\}$, где $x \setminus y$ равна $x \wedge \neg y$?

б) $\{\neg, \equiv\}$, где $x \equiv y$ равна $(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$?

6. Назовем функцией большинства $\text{MAJ}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ булеву функцию, значение которой совпадает с тем значением, которое принимает большинство переменных (если мнения разделились поровну, $\text{MAJ} = 0$).

а) Выражается ли MAJ через конъюнкцию и дизъюнкцию?

б) Запишите $\text{MAJ}(x, y, z)$ в виде многочлена Жегалкина.

7. Представьте функцию, заданную многочленом Жегалкина от переменных $x_1, \dots, x_n$

$$\bigoplus_{|S| \text{ — чётно}, S \neq \emptyset} \prod_{j \in S} x_j = x_1 x_2 \oplus \dots \oplus x_{n-1} x_n \oplus x_1 x_2 x_3 x_4 \oplus \dots$$

в виде ДНФ с как можно меньшим количеством конъюнктов.

8. В группе студентов есть один, который знает C++, java, python, haskell. Каждые три из этих языков знают два студента. Каждые два — 6 студентов. Каждый из этих языков знают по 15 студентов. Каково наименьшее количество студентов в такой группе?

9. При изготовлении пирожные — колечки трех сортов: шоколадные, с корицей и с орехами — упаковываются в стандартные коробки по 18 колечек в каждой. Каждая коробка может содержать колечки всех видов. Порядок колечек в коробке не существен.

Сколько можно составить различных наборов колечек при условии, что в коробке шоколадных колечек не более 9, колечек с корицей не более 3, а ореховых не более 9?

10*. Набор из 6 цифр (номер) называется счастливым, если сумма первых трех цифр равна сумме последних трех цифр. Сколько счастливых билетов?

1. Верно ли, что для любых множеств A и B выполняется равенство $(A \setminus B) \cap ((A \cup B) \setminus (A \cap B)) = A \setminus B$?
2. Верно ли, что для любых множеств A , B и C выполняется равенство

$$((A \setminus B) \cup (A \setminus C)) \cap (A \setminus (B \cap C)) = A \setminus (B \cup C)?$$

3. Верно ли, что для любых множеств A , B и C выполняется равенство $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$?
4. Верно ли, что для любых множеств A , B и C выполняется включение $(A \cup B) \setminus (A \setminus B) \subseteq B$?
5. Докажите, что представление булевой функции в виде стандартного многочлена Жегалкина единственно. (В стандартный многочлен Жегалкина все переменные входят в степени не выше 1.)
6. Является ли полной система связок $\{\vee; \rightarrow\}$?
7. Является ли полной система связок $\{\neg, \text{MAJ}(x_1, x_2, x_3)\}$? Здесь $\text{MAJ}(x_1, x_2, x_3)$ — булева функция, значение которой совпадает с тем значением, которое принимает большинство переменных.
8. Сколькими способами можно закрасить клетки таблицы 3×4 так, чтобы незакрашенные клетки содержали или верхний ряд, или нижний ряд, или две средних вертикали?
9. Для полета на Марс набирают группу людей, в которой каждый должен владеть хотя бы одной из профессий повара, медика, пилота или астронома. При этом в техническом задании указано, что каждой профессией из списка должно владеть ровно 6 человек в группе. Кроме того указано, что в группе должен найтись ровно один человек, владеющий всеми этими профессиями; каждой парой профессий должны владеть ровно 4 человека; каждой тройкой — ровно 2.

Выполнимо ли такое техническое задание?

10*. Размером ДНФ будем называть число вхождений переменных в нее. Каков минимальный размер ДНФ, задающей функцию

- а) $x_1 \oplus \dots \oplus x_n$;
- б) $\text{MAJ}(x_1, \dots, x_n)$?

1. Будем говорить, что одна прямоугольная коробка «меньше» другой, если одно из трёх измерений первой коробки меньше одного из трёх измерений второй (если их можно поставить на пол так, чтобы первая коробка была ниже второй). Будет ли это отношение транзитивным?

2. Сравните множества:

а) $(\cup_{i \in I} A_i) \times (\cup_{j \in J} B_j)$ и $\cup_{i \in I, j \in J} (A_i \times B_j)$; б) $(\cap_{i \in I} A_i) \times (\cap_{j \in J} B_j)$ и $\cap_{i \in I, j \in J} (A_i \times B_j)$.

3. Найдите $R \circ R$, где $R(x, y)$ — бинарное отношение на множестве $\mathbb{R}$, означающее, что

а) $y = x + 1$; б) $x + y = 1$.

4. Является ли композиция отношений эквивалентности отношением эквивалентности?

5. Двадцать пять школьников решали несколько задач; каждую задачу решили два школьника и каждый школьник решил две задачи. а) Сколько было задач? б) Докажите, что можно так организовать разбор задач, чтобы каждый школьник рассказал хотя бы по одной из решенных им задач.

6. Функция f определена на множестве X и принимает значения в множестве Y , при этом $B \subseteq Y$. Какой знак сравнения можно поставить вместо $?$, чтобы утверждение $f(f^{-1}(B)) ? B$ стало верным?

7. Чего больше: инъективных отображений 5-элементного множества в 20-элементное или сюръективных отображений 20-элементного множества в 5-элементное?

8. Пусть A и B — два множества. Покажите равносильность свойств «существует функция $f: A \rightarrow B$, являющаяся инъекцией» и «существует функция $f: B \rightarrow A$, являющаяся сюръекцией».

9. Пусть существуют инъекция $f: A \rightarrow B$ и сюръекция $g: A \rightarrow B$. Докажите, что тогда существует биекция $h: A \rightarrow B$.

10. Найдите количество а) неубывающих инъекций $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}$; б) неубывающих сюръекций $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}$.

Функция неубывающая, если $x \leq y$ влечет $f(x) \leq f(y)$.

11. Говорят, что $g: B \rightarrow A$ является *левой обратной* (соответственно *правой обратной*) к f , если $g \circ f = \text{id}_A$ (соответственно $f \circ g = \text{id}_B$).

а) Приведите примеры, когда левая обратная не является правой обратной и когда правая обратная не является левой. б) Может ли такое случиться для конечных множеств? в) Может ли быть так, что у одной функции есть и левая, и правая обратные, но они различны? г) Для каких функций существует левая обратная? д) Для каких функций существует правая обратная?

12*. а) На сфере отмечено 5 точек, никакие три из которых не лежат на большой окружности (большая окружность — это окружность, по которой пересекаются сфера и плоскость, проходящая через её центр). Две большие окружности, не проходящие через отмеченные точки, называются эквивалентными, если одну из них с помощью непрерывного перемещения по сфере можно перевести в другую так, что в процессе перемещения окружность не проходит через отмеченные точки.

Сколько можно нарисовать окружностей, не проходящих через отмеченные точки и не эквивалентных друг другу?

б) Та же задача для n отмеченных точек.

13*. Докажите, что всякое отношение $R \subseteq A \times B$ на конечных множествах является композицией $U \circ f_R$ некоторой функции f_R , зависящей от R , и отношения U , которое зависит только от множеств A и B .

1. Рассмотрим на множестве $\mathbb{R}$ бинарное отношение $R(x, y)$, означающее, что $xy > 1$. Чему равно $R \circ R$?
2. Докажите, что $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) \subseteq (A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2)$. При каких условиях на A_1, A_2, B_1, B_2 получается равенство?
3. В ходе турнира каждая команда сыграла с каждой по одному разу, причём ничьих не было и каждая команда хоть кому-то да проиграла. Докажите, что найдутся три команды А, Б, В, нарушившие транзитивность: А выиграла у Б, Б выиграла у В, а В выиграла у А.
4. Функция f определена на множестве $A \cup B$ и принимает значения в множестве Y . Какой знак сравнения можно поставить вместо $?$, чтобы утверждение

$$f(A \setminus B) ? f(A) \setminus f(B)$$

стало верным?

5. Функция f определена на множестве X и принимает значения в множестве Y , при этом $A \cup B \subseteq Y$. Какой знак сравнения можно поставить вместо $?$, чтобы утверждение

$$f^{-1}(A \setminus B) ? f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$$

стало верным?

6. Покажите, что если для функций $f: A \rightarrow B$ и $g: B \rightarrow A$ выполнены два равенства $g \circ f = \text{id}_A$ и $f \circ g = \text{id}_B$, то функция f является биекцией и g обратна к f .
7. На плоскости нарисовано некоторое количество равносторонних треугольников. Они не пересекаются, но могут иметь общие участки сторон. Мы хотим покрасить каждый треугольник в какой-нибудь цвет так, чтобы те из них, которые соприкасаются, были покрашены в разные цвета (треугольники, имеющие одну общую точку, могут быть покрашены в один цвет). Хватит ли для такой раскраски двух цветов?
8. Найдите количество неубывающих функций $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}$. Функция неубывающая, если $x \leq y$ влечет $f(x) \leq f(y)$.
- 9*. Докажите, что существует биекция $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, такая что $f(f(n))$ переводит четные числа в нечетные, а нечетные в четные.
- 10*. Докажите, что существует функция $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, такая что для всякого $n \in \mathbb{N}$

$$f(f(n)) \equiv n^2.$$

1. Сколько пар несравнимых элементов может быть в частичном порядке на четырёх элементах?
2. Найдите (с точностью до изоморфизма) все линейные порядки, в которых все отрезки конечны.
3. Изоморфны ли линейные порядки $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ и $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$?
4. Докажите, что любые два отрезка действительных чисел изоморфны как порядки, индуцированные сравнением чисел.
5. Докажите изоморфизм порядков, заданных отношением сравнения чисел на множествах

$$A = \{x : x \in \mathbb{Q}, 0 < x < 1\} \quad \text{и} \quad B = \{x : x \in \mathbb{Q}, 0 < x < \sqrt{2}\}.$$

6. Является ли фундированным множество всех конечных двоичных слов с отношением лексикографического порядка?
7. Шеренга новобранцев стоит перед старшиной. Старшина командует: нале-ВО! По неопытности часть солдат поворачивается неправильно. После этого каждую секунду происходит следующее: солдаты, оказавшиеся лицом друг к другу, понимают, что произошла ошибка, и оба поворачиваются кругом. Докажите, что рано или поздно повороты прекратятся.
8. Имеется конечная последовательность нулей и единиц. За один шаг разрешается любую группу 01 заменить на 10...0 (произвольное количество нулей). Докажите, что такие шаги нельзя выполнить бесконечное количество раз.
- 9*. Сколько есть линейных порядков, согласованных с порядком покоординатного произведения цепи длины 2 и цепи длины n ?

1. Пусть $\leq$ — рефлексивное и транзитивное бинарное отношение (не обязательно антисимметричное). Определим отношение $\sim$ следующим правилом: $x \sim y$ тогда и только тогда, когда $x \leq y$ и $y \leq x$. Докажите, что $\sim$ — отношение эквивалентности.

2. Сколько есть порядков на n -элементном множестве, в которых ровно одна пара элементов несравнима?

3. Рассмотрим два порядка: делители числа 30 (положительные целые числа, на которые 30 делится нацело) с отношением делимости ($x \mid y$ по определению означает, что y делится на x нацело) и подмножества множества $\{1, 2, 3\}$ с порядком по включению $x \subseteq y$.

Изоморфны ли эти порядки?

4. Изоморфны ли линейные порядки $\mathbb{Z} + \mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q} + \mathbb{Z}$?

5. Изоморфны ли линейные порядки $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$?

6. Изоморфны ли линейные порядки $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ и $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}$?

7. Рассмотрим множество невозрастающих бесконечных последовательностей натуральных чисел с лексикографическим порядком. Является ли это множество фундированным?

8*. Рассмотрим для произвольного k множество $\mathbb{N}^k$ с отношением покоординатного порядка. Существует ли в нем бесконечное подмножество, любые два элемента которого не сравнимы?

9*. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — два многочлена с натуральными (целыми неотрицательными) коэффициентами. Будем говорить, что P меньше Q , если $P(x) < Q(x)$ для всех достаточно больших x . Существует ли бесконечная последовательность многочленов $P_1, P_2, \dots$, в которой каждый следующий меньше предыдущего?

1. Пусть множества A и B равномощны. Докажите, что множества $A \times A$ и $B \times B$ также равномощны.
 2. Установите взаимно однозначное соответствие между натуральными числами и множеством слов в алфавите русского языка (слова — любые конечные последовательности букв).
 3. Докажите, что множество простых чисел счетно.
 4. Докажите, что множество конечных подмножеств рациональных чисел счетно.
 5. Пусть множество A конечно, а множество B счетно. Докажите, что множество функций $f: A \rightarrow B$ счетно.
 6. Функция называется периодической, если для некоторого числа T и любого x выполняется $f(x+T) = f(x)$. Докажите, что множество периодических функций $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ счетно.
 7. Установите взаимно однозначное соответствие между отрезком $[0, 1]$ и интервалом $(0, 1)$.
 8. Пусть A бесконечно, а B счетно. Верно ли, что множество $A \cup B$ равномощно множеству A ?
 9. Установите взаимнооднозначное соответствие между интервалом (a, b) и $(a, b) \cup \mathbb{Z}$.
 10. Установите взаимнооднозначное соответствие между окружностью радиуса 1 и окружностью радиуса $R > 0$.
 11. Установите взаимнооднозначное соответствие между окружностью и квадратом (без внутренности).
 12. Установите взаимнооднозначное соответствие между кругом без границы и кругом с границей.
- Множество A будем называть конечным, если для некоторого натурального n есть биекция из A в $\{1, \dots, n\}$. При этом n называется мощностью A .
13. Докажите, что если $A \sim \{1, \dots, n\}$ и $A \sim \{1, \dots, k\}$, то $k = n$ (определение мощности конечных множеств корректно).
 14. Докажите, что если A конечно и $B \subseteq A$, то
 - а) B конечно;
 - б) $|B| \leq |A|$;
 - в) $|B| = |A| \Leftrightarrow B = A$;
 - г) $|B| < |A| \Leftrightarrow B \subsetneq A$.
 15. Докажите, что только бесконечное множество может быть равномощно собственному подмножеству;
 16. Докажите, что любое подмножество счетного множества конечно или счетно.

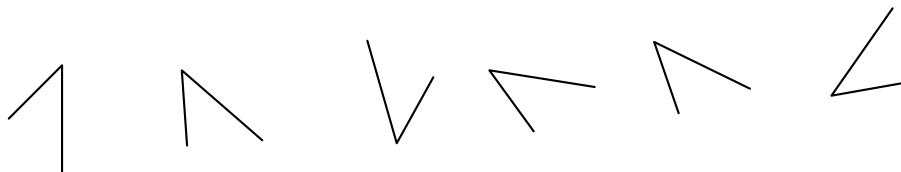
1. Верно ли, что если $A \setminus B$ бесконечно, а B счетно, то $A \setminus B$ равномощно A ?
2. Верно ли, что если A бесконечно, а B счетно, то $A \Delta B$ равномощно A ?
3. Установите взаимно однозначное соответствие между окружностью единичного радиуса и множеством действительных чисел $\mathbb{R}$.
4. Действительное число называется алгебраическим, если оно является корнем многочлена с целыми коэффициентами. Докажите, что множество алгебраических чисел счетно.
5. Докажите, что любое множество непересекающихся интервалов на прямой конечно или счётно.
6. Докажите, что всякое бесконечное множество содержит бесконечное число непересекающихся счетных подмножеств.
7. Установите взаимно однозначное соответствие между квадратом (с внутренностью) и кругом.
8. Докажите, что функция $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, которая задана правилами $f(2k) = 0$, $f(2k + 1) = 1$, не представляется в виде суммы двух биекций.
- 9*. Разбейте единичный круг (с границей) на непересекающиеся отрезки ненулевой длины.
- 10*. Докажите, что любые два счетных плотных линейных порядка без минимального и максимального элемента изоморфны.
- 11*. Докажите, что для всякой функции $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ существуют три биекции $g_1, g_2, g_3: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, такие что для всякого целого x верно $f(x) = g_1(x) + g_2(x) + g_3(x)$.

1. Счётно ли множество бесконечных двоичных последовательностей $b_0, b_1, \dots, b_n, \dots$, в которых
 - а) каждый отрезок чётной длины $b_i, b_{i+1}, \dots, b_{i+2k-1}$ содержит поровну нулей и единиц?
 - б) каждый отрезок нечётной длины $b_i, b_{i+1}, \dots, b_{i+2k}$ содержит почти поровну нулей и единиц (модуль разности равен 1)?
2. Докажите, что множество бесконечных последовательностей действительных чисел равномощно $\mathbb{R}$.
3. Существует ли континуальное семейство непересекающихся континуальных подмножеств $\mathbb{R}$?
4. Докажите, что множество непересекающихся восьмёрок на плоскости конечно или счётно. (Восьмёрка — это объединение двух касающихся внешним образом окружностей.)
5. Докажите, что отношений эквивалентности на множестве натуральных чисел континуум.
6. Верно ли, что отношений эквивалентности на множестве натуральных чисел, в которых каждый класс эквивалентности конечен, тоже континуум?
7. Верно ли, что множество функций $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ имеет мощность континуум?
- 8*. Множество X называется ограниченным, если для некоторого числа M и любого $x \in X$ выполняется неравенство $|x| \leq M$. Верно ли, что множество ограниченных подмножеств $\mathbb{R}$ имеет мощность континуум?
- 9*. Существует ли такое семейство подмножеств натуральных чисел, что (а) пересечение любых двух различных множеств в этом семействе конечно; (б) мощность семейства — континуум?
- 10*. Существует ли такое семейство подмножеств натуральных чисел, что (а) множества в этом семействе линейно упорядочены по включению; (б) мощность семейства — континуум?
- 11*. Докажите, что множество непрерывных функций $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ имеет мощность континуум.

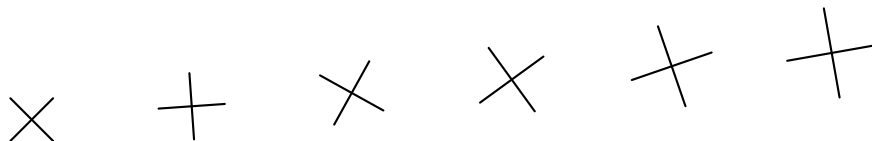
5.7. Рассмотрим множество невозрастающих бесконечных последовательностей натуральных чисел с лексикографическим порядком. Является ли это множество фундированным?

Пояснение. Эта задача была в задании 5. Если вы уже решили эту задачу, можете сдать старое решение.

1. Пусть A – точка на плоскости. Рассмотрим множество всех окружностей с центром в A . Верно ли, что это множество имеет мощность континуум?
2. Верно ли, что множество прямых на плоскости имеет мощность континуум?
3. Докажите, что множество интервалов на прямой имеет мощность континуум.
4. На плоскости отмечено континуум окружностей. Верно ли, что множество их центров имеет мощность континуум?
5. Верно ли, что множество бесконечных двоичных последовательностей, в которых нет трёх 1 подряд, имеет мощность континуум?
6. Верно ли, что множество сходящихся к 0 бесконечных последовательностей рациональных чисел имеет мощность континуум?
7. Докажите, что множество биекций $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ имеет мощность континуум.
8. Можно ли расположить на плоскости континуум непересекающихся равных единиц? (Единицами называются фигуры, изображенные на рисунке.)

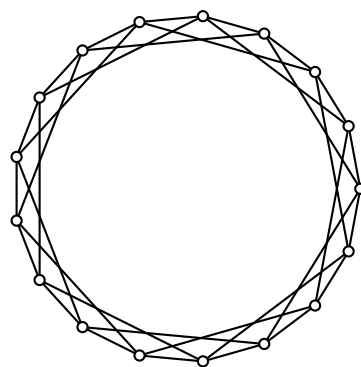
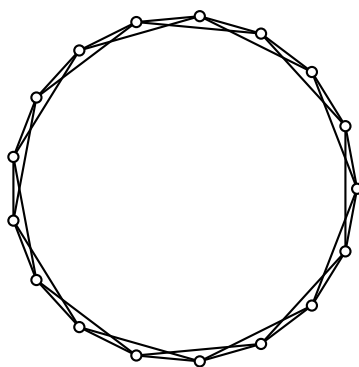


9. Крестом называется фигура, состоящая из двух диагоналей квадрата (см. рисунок). Можно ли расположить на плоскости континуум непересекающихся крестов?



10. Верно ли, что если $A \cup B$ континуально, то A или B континуально?
- 11*. Существует ли такое семейство подмножеств натуральных чисел, что (а) пересечение любых двух различных множеств в этом семействе конечно; (б) мощность семейства — континуум?
- 12*. Существует ли такое семейство подмножеств натуральных чисел, что (а) множества в этом семействе линейно упорядочены по включению; (б) мощность семейства — континуум?

1. Докажите, что нет такого графа на 77 вершинах, что степень каждой вершины равна 15.
2. Докажите, что в любом графе $\sum_{v \in V} d(v) = 2E$, где $d(v)$ — степень вершины, а E — количество рёбер.
3. Докажите, что во всяком графе, в котором есть хотя бы две вершины, найдутся две вершины одинаковой степени.
4. Докажите, что не существует графа с пятью вершинами, степени которых равны 4, 4, 4, 4, 2.
5. Докажите, что не существует такого орграфа на 5 вершинах, что выходные степени трёх вершин равны 3, а двух вершин равны 0, и входные степени трёх вершин равны 3, а двух вершин равны 0.
6. 50 команд сыграли турнир по волейболу в один круг. Говорят, что команда A сильнее B , если A выиграла у B или есть команда C , такая, что A выиграла у C , а C выиграла у B . Доказать, что команда, набравшая наибольшее число очков, сильнее любой другой.
7. Булевым кубом Q_n назовём граф, вершины которого — двоичные слова длины n , а рёбра связывают вершины, которые различаются только в одной позиции (пример: 00101 и 01101).
Докажите, что Q_n — двудольный.
8. а) Сколько индуцированных подграфов на 5 вершинах имеет граф K_5 ?
б) Сколько подграфов имеет на 5 вершинах имеет граф K_5 ?
9. Сколько независимых множеств размера 7 есть в цикле C_{16} ?
10. Верно ли, что в булевом кубе Q_4 есть ровно 16 независимых множеств размера 7?
11. Докажите, что S — вершинное покрытие тогда и только тогда, когда $V \setminus S$ — независимое множество.
12. Найдите все графы, для которых есть правильная раскраска в 1 цвет.
13. Докажите, что цикл C_5 нельзя правильно раскрасить в два цвета.
14. Докажите, что граф можно правильно раскрасить в 2 цвета тогда и только тогда, когда в нём нет циклов нечётной длины.
15. Можно ли правильно раскрасить в 3 цвета вершины графов, изображённых на рисунке?



1. Клетчатая прямоугольная сетка $m \times n$ связана из веревочек единичной длины. Двое делают ходы по очереди. За один ход можно разрезать (посередине) не разрезанную ранее единичную веревочку. Если не останется ни одного замкнутого веревочного контура, то игрок, сделавший последний ход, считается проигравшим. Кто из игроков победит при правильной игре и как он должен для этого играть?
2. Для всякого $n > 4$ доказать, что есть турнир, в котором из каждой вершины можно попасть в каждую по пути длины не больше 2.
3. Докажите, что у любого выпуклого многогранника есть две грани с одинаковым числом сторон.
4. Двадцать пять школьников решали несколько задач; каждую задачу решили два школьника и каждый школьник решил две задачи. а) Сколько было задач? б) Докажите, что можно так организовать разбор задач, чтобы каждый школьник рассказал хотя бы по одной из решенных им задач.
5. Раскрашенный в чёрный и белый цвета кубик с гранью в одну клетку поставили на одну из клеток шахматной доски и прокатили по ней так, что кубик побывал на каждой клетке ровно по одному разу. Можно ли так раскрасить кубик и так прокатить его по доске, чтобы каждый раз цвета клетки и соприкоснувшейся с ней грани совпадали?
6. Некоторый граф правильно раскрашен в k цветов, так что концы всякого ребра имеют разные цвета. Причем известно, что граф нельзя раскрасить в меньшее число цветов. Докажите, что в этом графе существует путь, вдоль которого встречаются вершины всех k цветов ровно по одному разу.

1. Связный граф — это граф, в котором между двумя любыми вершинами есть путь. Дерево — это связный граф без циклов. Докажите, что если в дереве есть хотя бы две вершины, то в нем есть по крайней мере две вершины степени 1.
2. Существует ли дерево на 9 вершинах, в котором 2 вершины имеют степень 5?
3. Докажите, что в дереве на $2n$ вершинах можно выбрать n вершин, между которыми нет ни одного ребра.
4. Докажите, что граф или его дополнение связны (возможно оба связны).
5. Какое максимальное число ребер может быть в несвязном графе с n вершинами?
6. Докажите, что в любом связном графе есть вершина, после удаления которой вместе со всеми примыкающими к ней ребрами граф остается связным.
7. Обозначим через $d(u, v)$ длину кратчайшего пути с концами в вершинах u и v . Это число называется *расстоянием* между вершинами на графе. Докажите неравенство треугольника

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

для расстояния на графе.

8. а) Докажите, что диаметр булева куба Q_n равен n . б) Есть ли в булевом кубе Q_n связный подграф диаметра $2^n - 1$?
9. Имеется группа островов, соединённых мостами так, что от каждого острова можно добраться до любого другого. Турист обошёл все острова, пройдя по каждому мосту ровно один раз. На острове Троекратном он побывал трижды. Сколько мостов ведет с Троекратного, если турист а) не с него начал и не на нем закончил? б) с него начал, но не на нем закончил? в) с него начал и на нем закончил?
- 10*. Пусть в дереве k листьев и нет вершин степени 2. Докажите, что количество вершин дерева меньше $2k$.
- 11*. Остовное дерево графа G — это подграф G , являющийся деревом и содержащий все вершины G . Докажите, что количество остовных деревьев в полном графе $G = K_n$ равно n^{n-2} при $n \geq 2$. Вершины G занумерованы от 1 до n и считаются различными. (формула Кэли)
- 12*. В графе из $2n + 1$ человек для любого подмножества из n вершин найдется отличная от них вершина, соединенная с каждой вершиной подмножества. Докажите, что есть вершина, соединенная со всеми остальными.
- 13*. а) Гамильтонов цикл — цикл, который проходит через каждую вершину данного графа ровно один раз. Докажите, что в графе с $n \geq 3$ вершинами и с минимальной степенью не меньше $n/2$ есть гамильтонов цикл. б) Докажите, что если минимальная степень меньше $n/2$, то есть граф без гамильтонова цикла.
- 14*. Паросочетание в графе G — это множество ребер, все концы которых различны. Паросочетание называется совершенным, если множество концов ребер равно множеству вершин графа G . Докажите теорему Холла: если в двудольном графе для всякого множества вершин S правой доли множество их соседей не меньше $|S|$, то в графе есть совершенное паросочетание.
- 15*. Дан граф, про который известно, что его можно раскрасить в 3 цвета (но сама раскраска неизвестна, известно лишь, что она существует). Придумайте алгоритм, раскрашивающий его в $O(n^{1/2})$ цветов.
- 16*. Таблица $N \times N$ заполнена числами так, что все строки различны. Докажите, что из таблицы можно вычеркнуть некоторый столбец, так что в оставшейся таблице опять все строки будут различны.

1. Существует ли граф на 8 вершинах, в котором 23 ребра и есть вершина степени 1?
2. В графе никакие два цикла не имеют общих вершин. Может ли в таком графе быть 3 цикла, 16 вершин и 17 рёбер?
3. В стране Цифра есть 9 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Путешественник обнаружил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, составленное из цифр-названий этих городов, делится на 3. Можно ли добраться из города 1 в город 9, используя эти авиалинии (возможно, с пересадками)?
4. В стране Семёрка 15 городов, каждый из которых соединён дорогами не менее, чем с 7 другими. Докажите, что из любого города можно добраться до любого другого (возможно, проезжая через другие города).
5. В дереве на 2014 вершинах ровно три вершины имеют степень 1. Сколько вершин имеют степень 3?
6. Куб со стороной $n \geq 3$ разбит перегородками на единичные кубики. Какое минимальное число перегородок между единичными кубиками нужно удалить, чтобы из каждого кубика можно было добраться до границы куба?
7. Известно, что в графе существует замкнутый маршрут, проходящий по каждому ребру ровно два раза. Верно ли, что в графе есть эйлеров цикл?
8. Докажите, что во всяком турнире есть маршрут, который проходит ровно по разу через каждую вершину и не нарушает ориентации рёбер (движение от начала ребра к концу).
9. Докажите, что при любых $0 \leq k \leq n$ таких, что kn — чётное, существует граф на n вершинах, степени которого равны k .
10. В графе $2n$ вершин, степень каждой равна n . Докажите, что после удаления любого подмножества из менее чем n рёбер получается связный граф.
- 11*. Придумайте алгоритм, работающий за полиномиальное время, находящий в графе вершинное покрытие, которое по размеру превышает минимальное не более чем в два раза.

1. При бросании двух кубиков какова вероятность в сумме получить 5?
2. Найдите вероятность того, что в шести подбрасываниях монеты выпадет ровно три орла.
3. Найдите вероятность того, что при броске трёх игральных кубиков число выпавших очков чётно или кратно 3.
4. Колоду из 36 карт раздают четверем людям, по 9 карт каждому.
 - а) Какова вероятность того, что у каждого человека все карты одной масти?
 - б) Какова вероятность того, что каждый получит по одному королю?
5. Десять учеников сдают экзамен по десяти билетам. Ученики по очереди заходят в кабинет и вытягивают случайный билет из оставшихся (в частности, последний берет единственный оставшийся билет). Вася выучил только один билет. Какова вероятность, что Васе достанется билет, который он знает, если
 - а) Вася тянет билет первым;
 - б) Вася тянет билет последним?
6. В самолет по очереди заходят 100 пассажиров. Первый садится на случайное место. Каждый следующий садится на свое место, если оно свободно, и на случайное место, если его место занято. Какова вероятность того, что последний пассажир сядет на свое место?
7. Лягушка прыгает по вершинам правильного шестиугольника $ABCDEF$ начиная из вершины A . На каждом прыжке лягушка прыгает в одну из соседних вершин с равными вероятностями. Вершина D испачкана краской, если лягушка попадает в нее, она тоже пачкается. С какой вероятностью после n прыжков лягушка все еще не испачкается?
- 8*. Каждый из 25 студентов в группе случайно и независимо решает ровно одну задачу из 8 задач домашнего задания. Какова вероятность, что каждая задача будет решена хотя бы одним человеком? (Мы оптимистично предполагаем, что если уж студент взялся решать задачу, то он ее решит.) Укажите числовой ответ с относительной погрешностью 10%.
- 9*. Прямоугольная таблица заполнена нулями и единицами. В каждой строке ровно n единиц, всего строк не больше 2^{n-1} . Докажите, что можно так вычеркнуть часть столбцов, чтобы в каждой строке оставшейся таблицы было меньше n единиц, но хотя бы одна единица была.
- 10*. Каждый коротышка в Цветочном городе составил расписание, отметив в календаре n дней, когда он идет в гости, и k дней, когда он принимает гостей (эти дни не совпадают). При этом известно, что каждый коротышка может сходить к каждому в гости в один из дней (у первого это день, когда он идет в гости, а у второго это день приема гостей). Докажите, что в Цветочном городе живет не больше $\binom{n+k}{n}$ коротышек.

Подсказка: Незнайка вырвал все листки из своего календаря и расположил их в случайном порядке. Какова вероятность того, что все дни, в которые Незнайка ходит в гости, предшествуют всем дням, в которые Незнайка принимает гостей?

1. При бросании двух кубиков какова вероятность получить два одинаковых числа?
2. Случайно и равновероятно выбрано целое число от 1 до 100. Найдите вероятность того, что сумма цифр этого числа равна 9.
3. Бросаем кубик четыре раза. Какова вероятность того, что выпадающие числа строго убывают? Укажите числовой ответ с абсолютной погрешностью 0.1.
4. На лотерейном билете требуется отметить 8 клеточек из 64. Какова вероятность того, что после розыгрыша, в котором также будет выбрано 8 каких-то клеток из 64 (все такие возможности равновероятны), окажется, что угаданы ровно 5 клеток? Укажите числовой ответ с относительной погрешностью 10%.
5. Шестьдесят четыре команды участвуют в турнире по олимпийской системе (команды случайно разбиваются на пары, парные команды играют между собой, победители проходят в следующий раунд, где процедура повторяется). Все команды упорядочены по силе, и более сильная всегда выигрывает у более слабой. Какова вероятность того, что в финале встретятся две самые сильные команды?
6. Вася и Петя бросают монету: Вася бросил ее 10 раз, а Петя — 11 раз. Чему равна вероятность того, что у Пети монета упала орлом большее число раз, чем у Васи?
7. Докажите, что найдется такой турнир, в котором любые 10 команд проиграли какой-то одной команде (победители разных десятков могут различаться).
8. Прямоугольная таблица заполнена нулями и единицами. В таблице $3n$ столбцов, а в каждой строке ровно n единиц. Известно, что для любых двух строк найдется такой столбец, в котором в данных строках стоят единицы.
- а) Докажите, что вероятность того, что случайно выбранная строка из n единиц и $2n$ нулей входит в такую таблицу, не больше $1/3$.
- б) Докажите, что количество строк в такой таблице не больше $\binom{3n-1}{n-1}$.

Замечание: если вы не решили пункт а), но умеете решать пункт б) с использованием пункта а), запишите это рассуждение.

1. Приведите примеры, в которых условная вероятность $\Pr[A | B]$ больше вероятности $\Pr[A]$, меньше её, а также равна ей.

2. Есть три внешне одинаковых мешочка. В одном лежит две золотых монеты, во втором — одна золотая и одна серебряная монета, в третьем — две серебряные.

Вы выбрали случайно и равновозможно один из мешочков и наугад достали из него монету. Она оказалась золотой. Какова вероятность, что и вторая монета в выбранном мешочке золотая?

3. Четыре человека А, Б, В, Г становятся в очередь в случайном порядке. Найдите а) условную вероятность того, что А первый, если Б последний; б) условную вероятность того, что А первый, если А не последний; в) условную вероятность того, что А первый, если Б не последний; г) условную вероятность того, что А первый, если Б стоит в очереди позже А; д) условную вероятность того, что А стоит в очереди раньше Б, если известно, что А раньше В.

4. Бросают кубик. Независимы ли события «выпало чётное число очков» и «выпало число очков, кратное 3»?

5. Выбирается случайная перестановка $x_1, x_2, \dots, x_{49}$ чисел от 1 до 49 (все перестановки равновозможны). Независимы ли события

а) « $x_{24} > x_{25}$ » и « $x_{25} > x_{26}$ »?

б) « x_{24} больше всех последующих» и « x_{25} больше всех последующих»?

6. Пять человек независимо друг от друга выбирают случайно и равновозможно одно из чисел от 0 до 9. Какое из событий более вероятно: «все выбранные числа различны» или «все выбранные числа делятся на 2»?

7. Пусть события A и B независимы, и вероятность события $\bar{B}$ положительна. Докажите, что события A и $\bar{B}$ независимы.

8. Пусть A и B — события положительной вероятности, отличной от 1. Докажите, что по любым трём из величин $\Pr[A | B]$, $\Pr[A | \bar{B}]$, $\Pr[B]$, $\Pr[B | A]$ можно найти четвёртую.

9. В суперфинале телешоу вам предлагается угадать в какой из трёх коробок лежит суперприз (приз лежит только в одной коробке). После того как вы выбираете коробку, ведущий открывает одну из других коробок, в которой приз не лежит, и предлагает вам выбрать из двух оставшихся коробок, то есть либо указать на ту же коробку, что и в начале, либо изменить свой выбор. Какой вариант выгоднее?

10*. Двое играют в такую игру: каждый ставит на свою последовательность орлов и решек (т.е. выбирает слово в алфавите $\{O, P\}$), после чего подбрасывается монета. Выигрывает тот из игроков, чья ставка появилась раньше.

Игрок А ставит на РРО, Б ставит на ОРР, В ставит на ООР, Г ставит на РОО. Докажите, что вероятность выигрыша игрока А у игрока Б равна $1/4$, вероятность выигрыша игрока Б у игрока В равна $1/3$, вероятность выигрыша игрока В у игрока Г равна $1/4$, вероятность выигрыша игрока Г у игрока А равна $1/3$.

1. Во сколько раз доля блондинов среди голубоглазых больше доли голубоглазых среди блондинов, если всего голубоглазых вдвое больше, чем блондинов?
2. Заранее известно, что пациент болен тяжелой болезнью с вероятностью 10^{-5} . Ему сделали тест на эту болезнь, который дает правильный результат с вероятностью 99%. Найдите отношение вероятностей событий «пациент болен этой болезнью» и «пациент не болен этой болезнью» при условии, что результат теста положительный.
3. Какова вероятность того, что случайно взятое число от 1 до 100 делится на 2, при условии, что оно делится на 3?
4. В розыгрыше лото случайно выбираются 5 чисел из множества $\{1, 2, \dots, 36\}$. Независимы ли события «среди выбранных чисел есть 2» и «среди выбранных чисел есть 3»?
5. Жюри из трех человек нужно принять одно из двух возможных решений, одно из которых правильное. Два члена жюри независимо друг от друга принимают правильное решение с вероятностью p , а третий случайно выбирает одно из двух возможных решений с равными вероятностями. Окончательное решение жюри выносится большинством голосов. Какова вероятность, что жюри примет правильное решение? (Сравните ее с вероятностью p правильного решения, принимаемого одним добросовестным членом жюри.)
6. Король предлагает узнику разложить десять белых и десять чёрных шаров по двум одинаковым коробкам (надо использовать все шары; в каждой коробке должен быть хотя бы один шар). После этого сначала король выбирает случайно одну из коробок, каждую с вероятностью $1/2$, а затем из выбранной коробки выбирает случайный шар, все с равными вероятностями. Если шар чёрный, то узника казнят, если белый — отпускают. Как нужно разложить шары, чтобы вероятность выжить была максимальной?
7. Двое игроков играют матч из 20 партий; выигрывает тот, кто первым наберёт 10 очков (за победу даётся одно очко, за проигрыш ноль, ничьих не бывает). Считая все варианты (любые комбинации из двадцати выигрышей и проигрышей) равновероятными, найдите вероятность того, что первый игрок выиграет матч, если после 15 игр счёт был $8 : 7$ в его пользу.
8. Двое играют в бой яиц. Перед ними стоит корзина с яйцами. Они наугад берут по яйцу и ударяют их носами. Разбитое яйцо выбрасывается и побеждённый берёт новое, а победитель раунда сохраняет своё яйцо для следующего раунда (предполагается, что победившее яйцо сохранило свою прочность и что исход каждого раунда зависит только от относительного качества яиц). Какова вероятность победы в $(n + 1)$ -м раунде после победы в предыдущих?

1. Каждый элемент n -элементного множества с вероятностью p независимо от других включается в множество S_p . Найдите математическое ожидание числа элементов в множестве S_p .
2. а) Выбирается случайное подмножество двоичных строк длины n . (Все подмножества равновероятны.) Найдите математическое ожидание суммарного числа единиц в строках этого подмножества.
б) Тот же вопрос, но выбирается случайное подмножество, в котором ровно k строк.
3. Подбрасывается «честная» монета вплоть до выпадения первого орла. Найдите математическое ожидание количества бросков.
4. Студент за выполнение домашней работы получает оценку от 1 до 10. Средняя оценка за серию домашних работ оказалась равной 6. Докажите, что доля работ, оценка за которые меньше 4, не превосходит $4/7$.
5. Докажите, что для любой случайной величины X выполняется неравенство $E[X^2] \geq (E[X])^2$.
6. Постройте алгоритм, который находит в графе разрез размера не меньше $|E|/2$ за время, ограниченное полиномом от числа вершин графа.
7. Докажите, что если в графе $G = (V, E)$ число вершин $|V| = 2n + 1$ нечётно, то в этом графе есть разрез размера не меньше $\frac{|E|(n+1)}{2n+1}$.
8. Пусть G — регулярный граф на n вершинах (степени всех вершин d). Возьмём случайный маршрут длины N (все маршруты равновозможны). Для каждого ребра графа найдите вероятность события «на k -м шаге маршрут проходит через ребро e ».
9. Выбирается случайная пара n^2 -элементных подмножеств n^3 -элементного множества (каждая пара равновозможна). Докажите, что вероятность того, что эти множества не пересекаются, стремится к 0 при $n \rightarrow \infty$.
10. Пусть f — случайная тотальная функция из n -элементного множества в $100n$ -элементное.
а) Докажите, что
$$\Pr[f \text{ инъективная}] \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

б)* Докажите, что
$$\Pr[|\Im f| < 0.95n] \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$
11. Найдите размер максимальной антицепи в покоординатном порядке на множестве $\{0, 1\}^n$. Другими словами, нужно найти максимальное количество подмножеств n -элементного множества, ни одно из которых не содержится в другом.

9.7. Докажите, что найдётся такой турнир, в котором любые 10 команд проиграли какой-то одной команде (победители разных десятков могут различаться).

9.8. Прямоугольная таблица заполнена нулями и единицами. В таблице $3n$ столбцов, а в каждой строке ровно n единиц. Известно, что для любых двух строк найдётся такой столбец, в котором в данных строках стоят единицы.

а) Докажите, что вероятность того, что случайно выбранная строка из n единиц и $2n$ нулей входит в такую таблицу, не больше $1/3$.

б) Докажите, что количество строк в такой таблице не больше $\binom{3n-1}{n-1}$.

Замечание: если вы не решили пункт а), но умеете решать пункт б) с использованием пункта а), запишите это рассуждение.

Пояснение. Эта задачи были в задании 9. Их решения разрешается сдавать вместе с этим заданием (номер 11).

1. В лотерее на выигрыши уходит 40% от стоимости проданных билетов. Каждый билет стоит 100 рублей. Докажите, что вероятность выиграть 5000 рублей (или больше) меньше 1%.

2. Выбирается случайно и равномерно 10 чисел из множества целых чисел от 0 до 29. Найдите математическое ожидание суммы этих чисел.

3. Выбирается случайное слово длины 20 в алфавите $\{a, b\}$ (все слова равновозможны). Найдите математическое ожидание числа подслов ab в этом слове.

4. По таблицам смертности, составленным в 1693 г. Э.Галлеем, средняя продолжительность жизни была 26 лет. При этом вероятность прожить не больше 8 лет была $1/2$. Какова была средняя продолжительность жизни тех людей, которые прожили не меньше 8 лет? (Укажите интервал возможных при данных условиях значений.)

5. Докажите, что вероятность получить в 10 бросаниях игральной кости сумму не меньше 50 не превосходит $1/30$.

6. Производится 10000 случайных и независимых подбрасываний честной монеты. Докажите, что вероятность того, что в этой серии подбрасываний не встретилось 10 орлов подряд, не превосходит $1/2$.

7. В графе n вершин и $nd/2$ рёбер (то есть средняя степень вершины равна d), $d \geq 1$. Докажите, что в графе есть независимое множество размера не меньше $n/2d$.

Подсказка. В решении этой задачи поможет случайное множество V_p , в которое каждая вершина входит с вероятностью p независимо от других вершин. (При подходящем значении параметра p .)

1. Известно, что a, b, c, d — положительные целые числа, $ab = cd$ и a делится на c . Докажите, что d делится на b .
2. При делении некоторого числа m на 13 и 15 получили одинаковые частные, но первое деление было с остатком 8, а второе без остатка. Найдите число m .
3. Какой остаток даёт число 100^{100} при делении на 99?
4. а) Докажите, что число $a^3 - a$ делится на 3 при любом целом a . б) Пусть p — простое число, большее 3. Докажите, что $p^2 - 1$ делится на 24.
5. Докажите, что если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то $ac \equiv bd \pmod{m}$.
6. Найдите наибольший общий делитель 238 и 39.
7. Найдите решения уравнения $45x - 37y = 25$ в целых числах.
8. Сколько положительных делителей имеет число $2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5^3$?
9. Докажите, что $(p-1)!$ даёт остаток -1 по модулю p для любого простого числа p .
10. Докажите, что для любого числа n между n и $n!$ есть простое число.
11. Пусть $\text{НОД}(a, b) = 1$. Найдите возможные значения $\text{НОД}(a+b, a^2+b^2)$.
12. Формулы включения – исключения для НОК и НОД. Докажите, что для положительных x, y, z выполняются равенства
 - а) $\text{НОК}(x, y) = \frac{xy}{\text{НОД}(x, y)}$;
 - б) $\text{НОК}(x, y, z) = \frac{xyz \cdot \text{НОД}(x, y, z)}{\text{НОД}(x, y) \cdot \text{НОД}(x, z) \cdot \text{НОД}(y, z)}$;
 - в) попробуйте выразить $\text{НОК}(x_1, \dots, x_n)$ аналогичным образом.
13. а) Верно ли, что для всякого n существует такая арифметическая прогрессия $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, что числа $a_1, \dots, a_n$ попарно взаимно просты?
- б) Верно ли, что существует такая арифметическая прогрессия $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, что для всякого n числа $a_1, \dots, a_n$ попарно взаимно просты?
- 14*. Делимость биномиальных коэффициентов. В этой задаче p — некоторое простое число.
 - а) $\binom{p}{k}$ делится на p .
 - б) Разделим числа n и k на p с остатком: $n = n'p + n_0$, $k = k'p + k_0$. Тогда

$$\binom{n}{k} \equiv \binom{n'}{k'} \binom{n_0}{k_0} \pmod{p}.$$

- в) Запишем n и k в p -ичной системе счисления: $n = n_0 + n_1p + \dots + n_dp^d$, $k = k_0 + k_1p + \dots + k_dp^d$. Биномиальный коэффициент $\binom{n}{k}$ делится на p тогда и только тогда, когда в одном из разрядов $k_i > n_i$.
- г) Максимальная степень p , на которую делится $\binom{x+y}{y}$, равна количеству переносов при сложении столбиком чисел x, y , записанных в p -ичной системе счисления.

1. Найдите остаток при делении 99^{1000} на 100.
2. Докажите, что число $x + 10y$ делится на 13 тогда и только тогда, когда $y + 4x$ делится на 13.
3. Решите сравнение $74x \equiv 1 \pmod{47}$.
4. Существует ли решение уравнения $37x + 71y = 12345$ в неотрицательных целых числах?
5. Докажите, что дробь $\frac{n^2 - n + 1}{n^2 + 1}$ несократима при всех положительных целых n .
6. Найдите самое большое возможное значение $\text{НОД}(a, b)$, если известно, что $ab = 12!$.
7. Найдите $\text{НОД}(3^{168} - 1, 3^{140} - 1)$.
8. Докажите, что числитель несократимой дроби, равной $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p-1}$, делится на p для любого простого $p > 2$.
9. Докажите, что число $2^{2^n} - 1$ имеет по крайней мере n различных простых делителей.

1. **а)** Какой может быть последняя цифра степени тройки в десятичной записи? **б)** Докажите, что предпоследняя цифра степени тройки всегда четна.
2. Сформулируйте и докажите признак делимости **а)** на 9; **б)** на 11. (В десятичной системе счисления.)
3. Сформулируйте и докажите признак делимости на 17 в 16-ичной системе счисления.
4. Найдите остаток при делении числа $\underbrace{111 \dots 111}_{105 \text{ цифр}}$ на 107. (Использована десятичная система.)
5. Докажите, что при любом целом a число $a^{73} - a$ делится на $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 73$.
6. Если от некоторого трёхзначного числа отнять 6, то оно разделится на 7, если отнять 7, то оно разделится на 8, а если отнять 8, то оно разделится на 9. Найдите это число.
7. Решите систему сравнений

$$x \equiv 3 \pmod{13},$$

$$x \equiv 4 \pmod{14},$$

$$x \equiv 5 \pmod{15}.$$

8. Решите систему сравнений

$$x \equiv 3 \pmod{15},$$

$$x \equiv 4 \pmod{21},$$

$$x \equiv 5 \pmod{35}.$$

9. Найдите остатки от деления **а)** 19^{10} на 66; **б)** 19^{14} на 70; **в)** 17^9 на 48; **г)** $14^{14^{14}}$ на 100.
10. Решите уравнение **а)** $\varphi(x) = x/3$; **б)** $\varphi(x) = x/4$.
11. Докажите равенство $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$ (суммирование по всем делителям числа n).
12. Докажите, что в любой арифметической прогрессии $a, a + d, a + 2d, \dots, a + nd, \dots$, составленной из натуральных чисел, есть бесконечно много членов, в разложении которых на простые множители входят в точности одни и те же простые числа.

1. Докажите, что при любом нечетном n число $2^{n!} - 1$ делится на n .
2. Найдите остаток от деления 8^{8^8} на 13.
3. Известно, что $a^{10} + b^{10} + c^{10} + d^{10} + e^{10} + f^{10}$ делится на 11. Докажите, что $abcdef$ делится на 11^6 .
4. При каких целых n число $a_n = n^2 + 3n + 1$ делится на 55?
5. Существует ли степень тройки, заканчивающаяся на $\dots 0001$ в десятичной записи?
6. Решить сравнение $x^2 \equiv 1 \pmod{200}$.
7. Найдите наименьшее положительное целое число, половина которого — квадрат целого, треть — куб, а пятая часть — пятая степень.
8. Может ли число, в десятичной записи которого 100 нулей, 100 единиц и 100 двоек, быть точным квадратом? (Т.е. квадратный корень целый.)
9. Докажите, что при любом k существует ровно 4 решения сравнения $x^2 \equiv x \pmod{10^k}$.

1. Среди n камней есть один радиоактивный. Счётчиком Гейгера мы можем проверить для любой кучки камней, если ли среди них радиоактивный. За какое наименьшее количество проверок можно найти радиоактивный камень?
2. В клетках шахматной доски написали в каком-то порядке числа от 1 до 64, каждое по одному разу. Про любое множество клеток доски мы можем спросить, какие числа на них стоят, и нам выдадут полный список. За какое наименьшее количество вопросов можно понять, где какие числа стоят?
3. а) Докажите, что из n монет можно одновременно найти самую тяжёлую и самую лёгкую за $\frac{3}{2}n + O(1)$ взвешиваний. б) Докажите, что быстрее этого сделать нельзя.
4. Вычисление булевой функции $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ в модели разрешающих деревьев происходит следующим образом: за один вопрос разрешается спросить значение одной из переменных, в конце нужно объявить значение функции. Сложность вычисления функции — наименьшее количество вопросов в адаптивном (вопрос может зависеть от предыдущих ответов) протоколе, вычисляющем функцию.
 - а) Найдите сложность вычисления дизъюнкции $\bigvee_i x_i$ в модели разрешающих деревьев.
 - б) Пусть $n = k + 2^k$, а функция $f(x_1, \dots, x_k, y_0, \dots, y_{2^k-1})$ равна y_x , где x — число, двоичная запись которого $x_1 \dots x_k$. Докажите, что сложность вычисления f в модели разрешающих деревьев не превосходит $k + 1$.
 - в) Докажите, что сложность вычисления функции f из предыдущего пункта не меньше $k + 1$.
 - г) Докажите, что неадаптивный протокол, вычисляющий функцию f (список вопросов составляется заранее, до получения ответов), содержит не менее n вопросов.
- 5*. Пусть противник загадал число от 1 до n , и мы можем задавать ему вопросы вида «меньше ли задуманное число данного конкретного числа». При этом противник может соврать, но противнику разрешается соврать в 1% случаев (мы должны заранее сообщить, сколько зададим вопросов, чтобы противник мог сосчитать 1% от этого числа). Докажите, что можно узнать загаданное число за $O(\log n)$ вопросов.

1. Найдите сложность вычисления суммы по модулю два $\bigoplus_i x_i$ в модели разрешающих деревьев.
2. Пусть числовой массив $a[1], \dots, a[n]$ строго унимодален. Это означает, что существует t , такое что

$$a[1] < a[2] < \dots < a[t] > a[t+1] > \dots > a[n-1] > a[n], \quad 1 \leq t \leq n.$$

Разрешается за один ход спросить значение одного элемента массива. Докажите, что можно найти значение максимального элемента $a[t]$ за не более $O(\log n)$ ходов.

3. Есть n монет, среди которых одна фальшивая. Настоящие монеты все имеют одинаковый вес, а фальшивая легче. За одно взвешивание можно сравнить две по весу любые две монеты. Докажите, что фальшивую монету можно найти за $\lfloor n/2 \rfloor$ взвешиваний.
4. Докажите, что в условиях предыдущей задачи для нахождения фальшивой монеты необходимо $\lfloor n/2 \rfloor$ взвешиваний.
5. Имеется n монет, среди которых одна фальшивая, и чашечные весы. Настоящие монеты все имеют одинаковый вес, а фальшивая легче. На каждую чашку весов можно класть произвольное количество монет. Докажите, что фальшивую монету можно найти за $\lceil \log_3 n \rceil$ взвешиваний.
6. Докажите, что в условиях предыдущей задачи для нахождения фальшивой монеты необходимо $\lceil \log_3 n \rceil$ взвешиваний.
7. Найдите среди n монет самую тяжелую и вторую по тяжести монету за $n + \log n + O(1)$ взвешиваний.
8. Докажите, что нельзя найти самую тяжелую и вторую по тяжести монету из n монет за менее чем $n + \log n + \Omega(1)$ взвешиваний.

1. Булева функция сравнения $L(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n)$ равна 1 тогда и только тогда, когда $(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n})_2 < (\overline{y_1}, \dots, \overline{y_n})_2$. Постройте схему размера $O(n)$, которая вычисляет $L(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n)$.
2. Пусть $n = k + 2^k$. Указательная функция $f(x_1, \dots, x_k, y_0, \dots, y_{2^k-1})$ равна y_x , где x — число, двоичная запись которого $x_1 \dots x_k$. Постройте схему полиномиального размера для указательной функции.
3. Постройте схему размера $O(n)$, которая вычисляет сумму n -битовых двоичных чисел.
4. Постройте схему размера $O(n^2)$, которая вычисляет произведение n -битовых двоичных чисел.
5. Рассмотрим вход функции $CONN: \{0, 1\}^{\binom{n}{2}} \rightarrow \{0, 1\}$ как неориентированный граф на n вершинах и положим $CONN(G) = 1$ тогда и только тогда, когда G связан. Постройте схему, которая вычисляет функцию $CONN$
 - а) размера $O(n^4)$;
 - б) размера $O(n^3 \log n)$.
6. Булева функция $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ называется монотонной, если для всяких $x, y \in \{0, 1\}^n$ верно

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y),$$

где векторы x и y сравниваются в покоординатном порядке. Булева схема называется монотонной, если в ней не используются отрицания. **а)** Докажите, что монотонная схема вычисляет монотонную булеву функцию. **б)** Докажите, что всякую монотонную булеву функцию можно вычислить монотонной булевой схемой.

7. Докажите, что всякую функцию $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ можно вычислить булевой схемой размера $O(2^n)$.
8. Постройте схему логарифмической глубины, вычисляющую функцию $PARITY = x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n$.
9. Постройте схему размера $O(n)$ и глубины $O(\log n)$, которая вычисляет функцию сравнения $L(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n)$.
10. Постройте схему, которая вычисляет сумму n -битовых двоичных чисел
 - а) полиномиального размера и глубины $O(\log n)$;
 - б) размера $O(n)$ и глубины $O(\log n)$.

1. Треугольником в графе называется тройка вершин, попарно соединенных между собой. Постройте схему полиномиального размера, которая по графу выдает 1 тогда и только тогда, когда в нем нет треугольников.
2. Постройте схему полиномиального размера, вычисляющую функцию MAJ . Функция $MAJ(x_1, \dots, x_n)$ равна 1 тогда и только тогда, когда $\sum_i x_i > n/2$.
3. Постройте схему полиномиального размера, вычисляющую функцию MAJ и не использующую отрицаний.
4. Докажите, что функцию XOR_3 можно вычислить, используя лишь одно отрицание (и много конъюнкций и дизъюнкций).
5. Постройте схему полиномиального размера для функции $f: \{0, 1\}^{\binom{n}{2}} \rightarrow \{0, 1\}$, равной единице, тогда и только тогда, когда данный на вход граф содержит эйлеров цикл (т. е. замкнутый маршрут, проходящий по каждому ребру графа ровно один раз).
6. Постройте схему полиномиального размера для функции $f: \{0, 1\}^{\binom{n}{2}} \rightarrow \{0, 1\}$, равной единице, тогда и только тогда, когда данный на вход граф раскрашиваем в два цвета.
7. Докажите, что всякую булеву схему размера s с n переменными можно переделать в булеву схему, в которой все отрицания применяются только к переменным, и при этом размер новой схемы не превышает $p(s, n)$, где p – некоторый фиксированный полином.

1. Про множества A , B , C известно, что $((A \cap B) \setminus (B \cap C)) \setminus (C \cap A) = \emptyset$. Верно ли, что тогда $A \cap B \cap C = \emptyset$?
2. Сопоставим целому числу $x \in \{0, \dots, 31^4 - 1\}$ число y по следующему правилу. Разделим x на 31^2 с остатком: $x = 31^2q + r$. Тогда $y = 31^2r + q$. Задаёт ли такое правило функцию из множества $\{0, \dots, 31^4 - 1\}$ в себя? Если да, то является ли эта функция биекцией?
3. Существует ли положительное трёхзначное число x , для которого выполняются сравнения

$$x \equiv 20 \pmod{41}, \quad x \equiv 21 \pmod{43}?$$

4. В простом неориентированном графе 20 вершин и 15 рёбер. Известно, что степени всех вершин равны 1 или 2. Каким может быть количество компонент связности в этом графе? (Укажите все возможные ответы.)
5. Случайно и равновероятно выбирается положительный делитель числа 144. Найдите математическое ожидание этого делителя.
6. Существуют ли такие функции f и g из множества $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$, что f и g не определены только в одной точке (каждая в своей), а композиция $f \circ g$ не определена ни в одной точке?
7. Существуют ли такие множества A , B , C и отношения $R \subset A \times B$ и $S \subset B \times C$, что композиция $S \circ R$ является функцией, но сами отношения R , S функциями не являются?
8. На первом этаже 17-этажного здания в лифт вошли 10 человек. Предположим, что каждый из вошедших независимо от остальных выходит с равной вероятностью на любом из 16 этажей (со 2-го по 17-й). Найдите математическое ожидание числа остановок лифта.

1. Докажите, что если A, B — разрешимые множества, то и множества $A \cup B, A \cap B, \bar{A}$ разрешимы.
2. Докажите, что если A, B — перечислимые множества, то и множества $A \cup B, A \cap B$ перечислимы.
3. Пусть S — это множество таких n , что десятичная запись числа e содержит по крайней мере n девяток подряд. Докажите, что множество S разрешимо. (Разрешается использовать тот факт, что e — иррациональное число.)
4. Перечислимо ли множество таких натуральных n , что уравнение $x^n + y^{n+1} = z^{n+2}$ имеет решение в положительных целых числах?
5. Всюду определенная функция $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ невозрастающая. Верно ли, что f вычислима?
6. Докажите, что не существует универсальной нумерации вычислимых всюду определенных функций, то есть такой всюду определенной вычислимой функции $U: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, что для любой вычислимой всюду определённой функции $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ найдется такое p , что $U(p, x) = f(x)$ для всех x .
7. Пусть U — универсальная вычислимая функция. Докажите, что $U(p, p)$ не определено для некоторого p .
8. Докажите, что если существует алгоритм перечисления элементов множества S в возрастающем порядке, то это множество разрешимо.
9. (Теорема Поста) Докажите, что если A и $\bar{A}$ перечислимы, то A разрешимо.
10. Докажите, что функция

$$c: (x, y) \mapsto \binom{x + y + 1}{2} + y$$

является вычислимой вместе с обратной биекцией между множествами $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ и $\mathbb{N}$.

11. Постройте вычислимую вместе с обратной биекцию между $\mathbb{N}$ и множеством конечных последовательностей с элементами из $\mathbb{N}$.
12. Диофантово уравнение — это уравнение вида $P(x_1, \dots, x_n) = 0$, где P — многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что перечислимость множества диофантовых уравнений, у которых есть целочисленные решения.

1. Вычислима ли следующая функция?

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{если существует бесконечно много пар простых чисел } p, p+2, \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

2. Докажите, что для любой универсальной вычислимой функции U множество $\{U(p, p) : p \in \mathbb{N}\}$ совпадает с $\mathbb{N}$.

3. Докажите, что если существует алгоритм перечисления элементов некоторого множества, то существует также и алгоритм, который перечисляет элементы множества без повторений.

4. Пусть U — универсальная вычислимая функция. Докажите, что $U(p, p^2)$ не определено для некоторого p .

5. Всюду определенная функция $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ строго возрастает и множество ее значений содержит все натуральные числа за исключением конечного множества. Докажите, что f вычислима.

6. Докажите, что любое бесконечное перечислимое множество содержит бесконечное разрешимое множество.

7. Докажите, что декартово произведение перечислимых множеств перечислимо.

8. Докажите, что множество рациональных чисел, меньших ϵ , разрешимо.

9. Пусть S — разрешимое множество натуральных чисел. Множество D состоит из всех простых делителей множества S . Верно ли, что D перечислимо?

Определение. Пусть $A \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ — множество пар натуральных чисел. Его *проекцией* $\text{Пр } A$ назовём множество таких x , что для некоторого y пара (x, y) входит в множество A .

1. Докажите, что проекция перечислимого множества перечислима.
2. Пусть $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ — вычислимая функция, множество $A \subseteq \mathbb{N}$ перечислимо. Докажите, что **а)** образ $f(A)$ перечислим; **б)** прообраз $f^{-1}(A)$ перечислим.
3. Пусть $A \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ перечислимо. Докажите, что существует вычислимая функция f , область определения которой $\text{Пр } A$, а график содержится в множестве A .
4. Существует ли разрешимое множество D пар натуральных чисел, универсальное для разрешимых множеств (то есть для любого разрешимого $X \subseteq \mathbb{N}$ найдётся такое p , что $X = \{x : (p, x) \in D\}$)?
5. Докажите, что бесконечное подмножество $\mathbb{N}$ разрешимо тогда и только тогда, когда оно является множеством значений всюду определённой возрастающей вычислимой функции $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.
6. Найдите разрешимое множество $A \subseteq \mathbb{N}$ и вычислимую всюду определённую функцию $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ такие, что образ $f(A)$ неразрешим.
7. Пусть функция f растёт быстрее любой вычислимой функции, то есть для любой вычислимой функции g найдётся такое N , что $f(x) > g(x)$ для всех $x > N$, принадлежащих области определения g . Докажите, что $f(\mathbb{N})$ неразрешимо.
8. **а)*** Докажите, что существует такое перечислимое множество $P \subset \mathbb{N}$, что дополнение к P бесконечно, но P пересекается с любым бесконечным перечислимым множеством. (Такое множество называется *простым*.)
б) Докажите, что простое множество неразрешимо.

1. Докажите, что непустое подмножество $\mathbb{N}$ разрешимо тогда и только тогда, когда оно является множеством значений всюду определённой неубывающей вычислимой функции $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.
2. Пусть $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ — всюду определённая вычислимая функция, множество $A \subseteq \mathbb{N}$ разрешимо. Докажите, что $f^{-1}(A)$ также разрешим.
3. Найдите разрешимое множество $A \subseteq \mathbb{N}$ и вычислимую функцию $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ такие, что прообраз $f^{-1}(A)$ неразрешим.
4. Докажите, что во всяком бесконечном разрешимом множестве натуральных чисел есть перечислимое неразрешимое подмножество.
5. Пусть X, Y — перечислимые множества. Докажите, что найдутся такие непересекающиеся перечислимые множества $X' \subseteq X$ и $Y' \subseteq Y$, $X' \cap Y' = \emptyset$, что $X \cup Y = X' \cup Y'$.
6. Пусть S — разрешимое множество натуральных чисел. Множество D состоит из всех простых делителей множества S . Верно ли, что D разрешимо?
7. Докажите, что перечислимо множество программ, которые останавливаются хотя бы на одном входе. Более формально: пусть U — универсальная вычислимая функция, а S — множество тех p , для которых функция $U(p, x)$ определена хотя бы при одном x . Тогда S — перечислимо.

1. Пусть $U(p, x)$ — главная универсальная вычислимая функция. Докажите, что для любой вычислимой функции трёх аргументов $V(m, n, x)$ найдётся такая всюду определённая вычислимая функция $s(m, n)$, что $V(m, n, x) = U(s(m, n), x)$ для всех m, n, x .
2. Пусть $U(p, x)$ — главная универсальная вычислимая функция. Докажите, что найдётся такое n , что $U(n, x) = n^2$ для всех x .
3. Докажите, что множество S перечислимо тогда и только тогда, когда существует вычислимая функция, область определения которой совпадает с S , а значение равно 0 в каждой точке области определения.
4. Пусть $U(p, x)$ — главная универсальная вычислимая функция, а S — множество тех p , для которых функция $U(p, x)$ не определена при всех x (т.е. это множество программ, которые не останавливаются ни на одном входе).
- а) Докажите, что S неразрешимо, используя следующую вычислимую функцию от двух аргументов:

$$V(p, x) = \begin{cases} 0, & p \in K, \\ \text{не определена в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь K — перечислимое неразрешимое множество.

- б) Докажите, что S неперечислимо.

5. Докажите теорему Успенского–Райса аналогично предыдущей задаче.

Формулировка теоремы Успенского–Райса: если $U(p, x)$ — главная универсальная вычислимая функция и $\mathcal{A}$ — некоторое нетривиальное свойство функций (которое для некоторых вычислимых функций выполняется, а для некоторых — нет), то неразрешимо множество $N_{\mathcal{A}}$ номеров тех функций, для которых выполняется свойство $\mathcal{A}$.

6. Пусть $V(p, x)$ — универсальная вычислимая функция и существует такая всюду определённая функция $C(p, q)$, которая по номерам p и q вычислимых функций выдаёт номер их композиции (то есть $V(C(p, q), x) = V(p, V(q, x))$). Докажите, что V — главная.
7. Постройте неглавную универсальную вычислимую функцию.
- 8*. (Эффективное построение бесконечного количества программ для одной и той же функции.) Пусть $U(p, x)$ — главная универсальная вычислимая функция. Докажите, что существует такая всюду определённая вычислимая функция $g: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, что для любого p все значения $g(p, i)$ различны и являются U -номерами функции $U(p, x)$ (то есть $U(p, x) = U(g(p, i), x)$ для всех x).
- 9*. (Теорема Роджерса: все главные функции изоморфны.) Пусть $U_1(p, x), U_2(p, x)$ — две главные универсальные вычислимые функции. Докажите, что существует такая вычислимая биекция $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, что $U_1(p, x) = U_2(f(p), x)$ и $U_1(f^{-1}(p), x) = U_2(p, x)$ для всех p и x .

1. Пусть $U(p, x)$ — главная универсальная вычислимая функция, а $V(n, x)$ — вычислимая функция от двух аргументов. Докажите, что найдётся такое p , что $U(p, x) = V(p, x)$ для всех x .
2. Пусть $U(p, x)$ — главная универсальная вычислимая функция. Докажите, что найдётся такое n , что $U(n, x) = n + x$ для всех x .
3. Пусть $U(p, x)$ — главная универсальная вычислимая функция. Докажите, что для любой всюду определённой функции $h(n)$ найдется бесконечно много неподвижных точек, то есть таких чисел p , что $U(p, x) = U(h(p), x)$.
4. Пусть $U(p, x)$ — главная универсальная вычислимая функция. Обозначим через $K \subset \mathbb{N}^2$ множество таких пар (k, n) , что функция $U(k, x)$ является продолжением функции $U(n, x)$ (т.е. $U(k, x) = U(n, x)$ на области определения функции $U(n, x)$). Докажите, что множество K неразрешимо.
5. Пусть $U(p, x)$ — универсальная вычислимая функция. Докажите, что неперечислимо множество T таких номеров t , что $U(t, x)$ определена для всех x .
6. Докажите, что найдётся такая вычислимая функция $f(x)$, что $f(0) = 0$, а функция

$$m(x) = \max_{y \leq x, y \in \text{Dom} f} f(y)$$

невычислима. (Максимум берётся по тем y , для которых $f(y)$ определена.)

7. Докажите, что всякое бесконечное перечислимое множество содержит бесконечное количество непесекающихся бесконечных перечислимых множеств.

Если в задаче сказано «постройте МТ», нужно привести таблицу переходов МТ и доказать корректность. Если в задаче сказано «докажите существование МТ», то таблицу переходов строить необязательно (и даже нежелательно). Учтите, что сама по себе таблица переходов не является доказательством чего бы то ни было! (Это вообще не утверждение.)

1. Постройте МТ, которая вычисляет постоянную функцию $f: w \mapsto \lambda$, где λ — пустое слово.
2. Постройте МТ, которая прибавляет 1 к натуральному числу x , если
 - (а) x представлено в унарной системе (вход имеет вид $1^x = \overbrace{111 \dots 11}^{x \text{ раз}}$), результат также представляет $x + 1$ в унарной системе;
 - (б) вход и результат представлены в двоичной системе.
3. Докажите существование МТ, которая удваивает вход (то есть, на входе w результатом должно быть слово ww).
4. (Вставка пустого места посреди конфигурации.) Докажите, что существует МТ с состоянием q_i , для которой верно следующее: работа машины на любой конфигурации вида uq_iv заканчивается в конфигурации $u\Lambda q_f v$ (здесь Λ — пустой символ).
5. Докажите, что существует МТ, которая находит n -й символ в двоичном слове. Формально это означает, что на входе $n\#w$ результатом работы должно быть w_n . Здесь n представлено в двоичной записи, а $\#$ — символ-разделитель (не 0 и не 1).
6. (О невозможности очистки ленты.) Докажите, что не существует МТ с таким «волшебным состоянием» q_m , что любую конфигурацию, содержащую q_m , машина переводит в пустую конфигурацию q_f , где q_f — финальное состояние.
7. Докажите, что существует МТ, которые преобразуют унарное представление натурального числа в двоичное и обратно.
8. Постройте (многоленточные) МТ, которые выполняют следующие действия.
 - а) «Переход к указателю»: машина двигает головку до тех пор, пока головка не оказывается над заданным символом (указателем) $\#$. В терминах конфигураций это означает, что конфигурацию $\dots q_0 x \# \dots$ машина должна переводить в конфигурацию $\dots x q_1 \# \dots$. Здесь q_0, q_1 — состояния МТ, а x — слово, которое не содержит указателя.
 - б) «Копирование»: машина копирует содержимое области одной ленты на другую ленту. В терминах конфигураций это означает, что машина переводит конфигурацию

$$(\dots q_0 \triangleleft u \triangleright \dots, \dots q_0 \# \dots)$$

в конфигурацию

$$(\dots q_1 \triangleleft u \triangleright \dots, \dots q_1 \# u \dots).$$

Здесь q_0, q_1 — состояния МТ, символы-ограничители $\triangleleft, \triangleright$ задают область, которую нужно скопировать, $\#$ — указатель, а слово u не содержит ни указателя, ни ограничителей.

(Конфигурация двухленточной машины — это пара слов.)

в) «Сравнение слов»: машина сравнивает две области на двух лентах. В терминах конфигураций это означает, что машина переводит конфигурацию

$$(\dots q_0 \triangleleft u \triangleright \dots, \dots q_0 \triangleleft v \triangleright \dots)$$

в конфигурацию

$$(\dots q' \triangleleft u \triangleright \dots, \dots q' \triangleleft v \triangleright \dots),$$

где $q' = q_1$ если $u = v$, а в противном случае $q' = q_2$. Здесь q_0, q_1, q_2 — состояния МТ, символы-ограничители $\triangleleft, \triangleright$ задают сравниваемые области, а слова u, v не содержат ограничителей.

9*. Докажите, что существует одноленточная МТ, которая удваивает слова вида 1^n (результат 1^{2n}), и работает $O(n \log n)$ тактов.

Если в задаче сказано «постройте МТ», нужно привести таблицу переходов МТ и доказать корректность. Если в задаче сказано «докажите существование МТ», то таблицу переходов строить необязательно (и даже нежелательно). Учтите, что сама по себе таблица переходов не является доказательством чего бы то ни было! (Это вообще не утверждение.)

При решении задач этого задания разрешается использовать по выбору одноленточные или многоленточные машины.

1. Постройте МТ, которая вычисляет нигде не определённую функцию.
2. Постройте МТ, которая инвертирует входное двоичное слово: на входе w , где $w = w_1 \dots w_n$, $w_i \in \{0, 1\}$, результатом работы должно быть слово $\bar{w} = \bar{w}_1 \dots \bar{w}_n$.
3. Докажите существование МТ, которая циклически переставляет символы входа: на входе aw , где a — символ алфавита, результатом работы должно быть слово wa .
4. Докажите существование МТ, которая сортирует символы входного двоичного слова: на входе w , где двоичное слово w содержит a нулей и b единиц, результатом работы должно быть слово $0^a 1^b$.
5. Докажите существование МТ, которая проверяет, что вход является палиндромом. (Слово $a_1 a_2 \dots a_n$ называется палиндромом, если $a_1 a_2 \dots a_n = a_n a_{n-1} \dots a_1$.) Если вход является палиндромом, результат работы должен быть 1, а если нет, то результат 0.
6. Постройте по МТ M и входу x такую МТ M_x , которая останавливается на входе x тогда и только тогда, когда M останавливается на пустом входе.

1. Выведите неразрешимость проблемы остановки МТ напрямую из тезиса Чёрча–Тьюринга, не ссылаясь на существование универсальной машины или абстрактную теорию алгоритмов.
2. Упорядочим слова в алфавите $\{0, 1, \#\}$ по правилу: более короткое слово меньше более длинного, а слова одинаковой длины упорядочиваются лексикографически. Докажите, что существует МТ, которая по слову в алфавите $\{0, 1, \#\}$ находит следующее слово в указанном порядке.
3. Докажите существование МТ, которая по входу $\langle M \rangle \# \langle x \rangle \# 1^t$ проверяет, останавливается ли машина M на входе x за t шагов.
4. Докажите, что существуют МТ, разрешающие следующие множества слов:
 - а) слова вида $\langle M \rangle$, где M — машина Тьюринга;
 - б) слова вида $\langle x \rangle$, где x — слово в некотором алфавите;
 - в) слова вида $\langle M \rangle \odot \langle x \rangle$, где M — машина Тьюринга, x — входное слово для M .

Разрешимость множества слов X машиной M означает, что M даёт результат 1 на словах из X и результат 0 на остальных словах.

5. Пусть $T(\langle M \rangle, \langle w \rangle)$ — номер того такта работы машины Тьюринга M на входе w , на котором головка в последний раз оказывается над пустым символом. (Если головка никогда не оказывается над пустым символом или оказывается над ним бесконечно много раз, $T(\langle M \rangle, \langle w \rangle)$ не определена.) Вычислима ли функция $T(\langle M \rangle, \langle w \rangle)$?
6. Постройте МТ, которая вставляет «много» пробелов. Более точно это означает, что машина преобразует конфигурацию $\dots [u \# w q_0 \# v] \dots$ в конфигурацию $\dots [u \# w q_1 \# \Lambda \dots \Lambda \# v] \dots$. Здесь Λ — пустой символ, q_0, q_1 состояния, символы $\#, [,]$ — разделители, слово w не содержит разделителей, а количество добавленных пустых символов равно длине слова w .
7. Докажите, что для каждой МТ M существует МТ M_{all} , которая исполняет работу M на всех входах. Это означает, что M_{all} работает по стадиям: первая стадия состоит в исполнении первого такта на первом входе, вторая — второго такта на первом входе и первого такта на втором входе и т.д.: на N -й стадии исполняется N -й такт на первом входе, $(N - 1)$ -й такт на втором входе, $\dots$, первый такт на N -м входе. Порядок на входах такой же, как в задаче 2.
8. Пусть имеется МТ M , которая вычисляет функцию $V(n, x)$ от двух переменных. Докажите, что существует такая МТ S , которая по входу n выдаёт как результат описание МТ M_n , вычисляющей функцию $f_n(x) = V(n, x)$.

9*. Разрешима ли проблема остановки для машин Тьюринга с «хрупкой» лентой? Если такая машина меняет символ одной из ячеек ленты второй раз, то она останавливается («лента рвётся»).

10*. Разрешима ли проблема остановки для машин Тьюринга с засорившейся головкой? Это такие машины, которые могут записать на ленту только один символ $*$ («кляксу»). Формально это означает, что таблица переходов удовлетворяет условию если $\delta(a, q) = (a', q', d)$, то $a' \in \{a, *\}$.

В решениях задач этого задания разрешается ссылаться на результаты задач классного занятия 21.

1. Пусть машины M_1 и M_2 вычисляют функции $f_1: B^* \rightarrow \{0, 1\}$ и $f_2: B^* \rightarrow \{0, 1\}$. Докажите, что существует МТ M , которая вычисляет дизъюнкцию $f_1 \vee f_2$ этих функций.
2. Разрешимо ли множество описаний МТ, которые при работе на пустом входе не изменяют положение головки на ленте?
3. Докажите, что неразрешима проблема останковки МТ на пустом входе. Формально: не существует машины Тьюринга, которая получает на вход описание машины Тьюринга M и даёт результат 1, если M останавливается на пустом входе, и результат 0 в противном случае.
4. Разрешимо ли множество описаний МТ, которые на любом входном слове работают не дольше 2015 тактов?
5. Пусть $T_a(\langle M \rangle, \langle w \rangle)$ — номер того такта работы машины Тьюринга M на входе w , на котором головка в первый раз оказывается над символом a . (Если головка никогда не оказывается над символом a , функция $T_a(\langle M \rangle, \langle w \rangle)$ не определена.) Вычислима ли функция $T_a(\langle M \rangle, \langle w \rangle)$?
6. Докажите, что существует МТ, которая вычисляет биекцию $c: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, где

$$c: (x, y) \mapsto \binom{x + y + 1}{2} + y.$$

Числа заданы в унарной записи (т.е. n записывается как слово 1^n).

7. Докажите, что существует МТ, которая на любом входе выдаёт в качестве результата своё описание.
8. Докажите, что существует МТ, которая перечисляет описания тех МТ, которые останавливаются хотя бы на одном входе.

1. Пусть граф на множестве слов в алфавите $\{0, 1\}$ задан набором правил подстановки

$$\{010 \rightarrow 101, 101 \rightarrow 010\}.$$

Докажите, что задача достижимости для такого графа разрешима.

2. Разрешима ли задача достижимости для графов, заданных правилами подстановки вида $u \rightarrow a$, где a — символ алфавита, u — непустое слово?

3. Докажите, что алгоритмически неразрешима задача достижимости для графов, заданных правилами подстановки в алфавите из двух символов.

4. Разрешима ли задача достижимости для графов, заданных правилами подстановки вида $au \rightarrow av$, где a — некоторый фиксированный символ алфавита?

5. Граф, заданный на множестве слов набором правил подстановки, назовём универсальным, если в этом графе любое слово достижимо из пустого.

- а) Разрешима ли проверка на универсальность графа, заданного правилами подстановки?

- б) Перечислимо ли множество описаний универсальных графов, заданных набором правил подстановки?

6. Докажите, что алгоритмически неразрешима задача останова МТ в двоичном алфавите (то есть алфавит содержит всего один непустой символ).

- 7*. Разрешима ли проверка ацикличности графа, заданного правилами подстановки? (Ацикличность графа означает, что в графе нет ориентированных циклов.)

Уведомление. Это задание не будет проверяться и не будет учитываться в итоговой оценке по курсу. Задание предназначено для подготовки к экзамену, решения задач будут обсуждаться на лекциях и семинарах.

1. Найдите максимальное количество рёбер в таких ориентированных графах на n вершинах, которые не имеют ориентированных циклов.
2. Случайно, равновероятно и независимо выбираются два положительных делителя числа $12!$. Сравните вероятность того, что эти делители взаимно просты, с $1/100$.
3. Найдите $\text{НОД}(\underbrace{11 \dots 11}_{120 \text{ штук}}, \underbrace{11 \dots 11}_{84 \text{ штуки}})$. (Числа записаны в десятичной системе счисления.)
4. Рассмотрим вход функции Tree: $\{0, 1\}^{\binom{n}{2}} \rightarrow \{0, 1\}$ как неориентированный граф на n вершинах и положим $\text{Tree}(G) = 1$ тогда и только тогда, когда G дерево. Найдите сложность вычисления функции Tree в модели разрешающих деревьев.
5. Булева функция $U_2(x_1, \dots, x_n)$ равна 1 тогда и только тогда, когда среди значений $x_1, \dots, x_n$ есть ровно 2 единицы. Постройте схему размера $O(n)$, вычисляющую функцию U_2 .
6. Постройте вычислимую биекцию $f: \{0, 1\}^* \times \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ между множеством пар двоичных слов и множеством двоичных слов. Укажите явно правило, которое сопоставляет паре слов значение этой биекции. Найдите для построенной биекции (а) $f(00, 11)$, (б) $f^{-1}(10)$.
7. Известно, что функция $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ невычислима. Верно ли, что множество её значений

$$f(\mathbb{N}) = \{y : y = f(x) \text{ для некоторого } x\}$$

неразрешимо?

8. Пусть $U(p, x)$ — главная универсальная вычислимая функция. Докажите, что перечислимо множество тех программ, которые вычисляют функцию, не равную 0 на всей области определения. (Формально это множество таких чисел p , что $U(p, x) \neq 0$ для некоторого x .)