Числа Маркова в арифметике и геометрии

Ю. Г. ПРОХОРОВ

Андрей Андреевич Марков-старший (1856–1922) – выдающийся русский математик. Широко известны и общепризнаны его работы по теории вероятностей и математическому анализу. Разработанная им теория обширного класса стохастических процессов с дискретной и непрерывной временной компонентой, названных его именем, имеет бесчисленные применения в современных теоретических и прикладных исследованиях, её влияние трудно переоценить. Огромный вклад внес А. А. Марков в теорию непрерывных дробей и исчисление конечных разностей. В теории распознавания образов и задачах искусственного интеллекта большая часть алгоритмов используют понятие скрытой марковской модели, которое берет начало в работах Маркова.

Однако не менее известен А. А. Марков как специалист по теории чисел. Первый значимый результат он получил в своей магистерской диссертации “О бинарных квадратичных формах положительного определителя” [12, 13], см. также [5, 6]. Одним из центральных объектов диссертации является одно диофантово уравнение, которое впоследствии возникало во многих областях математики, довольно далеких от изначальной задачи о минимизации квадратичных форм. В настоящей заметке мы обсудим этот аспект обширного математического наследия А. А. Маркова.

1. Уравнение Маркова

Уравнение Маркова – это диофантово уравнение вида

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3x_1x_2x_3. \tag{$*$}$$

Решения этого уравнения сейчас известны как *тройки Маркова*, а *числа Маркова* – это все натуральные числа, появляющиеся в этих тройках. Пусть (x_1, x_2, x_3) – тройка Маркова. Рассмотрим следующие три преобразования

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & (x_1, x_2', x_3) & \\
 & (x_1, x_2, x_3) \arrow[u, "t_2"] \arrow[dl, "t_1"'] \arrow[dr, "t_3"] & \\
(x_1', x_2, x_3) & & (x_1, x_2, x_3')
\end{tikzcd} \tag{†}
$$

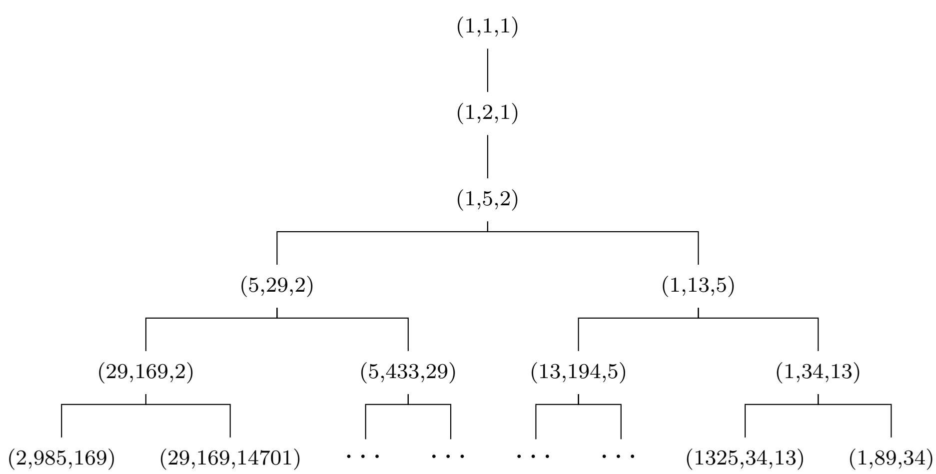
где

$$x_i' := \frac{3x_1x_2x_3}{x_i} - x_i.$$

По формулам Виета новые тройки

$$(x_1', x_2, x_3), \quad (x_1, x_2', x_3), \quad (x_1, x_2, x_3') \tag{‡}$$

также являются решениями уравнения Маркова, причем $x_i' \neq x_i$. Такое преобразование t_i называется *элементарной перестройкой* или *мутацией* в элементе x_i, а соответствующие тройки называются *соседними*. Можно показать, что если все три числа x_1, x_2, x_3 различны, то и все тройки (‡) также различны. Более того, элементарная перестройка в максимальном элементе тройки уменьшает этот элемент. Например, если $x_1 = \max(x_1,\, x_2,\, x_3)$, то $x_1' < \max(x_2,\, x_3) < x_1$. Отсюда следует, что любое решение уравнения Маркова получается из $(1, 1, 1)$ последовательным применением элементарных перестроек. Все тройки Маркова могут быть записаны в виде графа, в котором соседние соединяются ребром. Граф имеет форму бесконого тривалентного дерева:



Легко видеть, что любое число Маркова является максимальным в некоторой тройке. В 1913 г. Фробениус высказал гипотезу.

Гипотеза (гипотеза единственности)**.** *Тройка Маркова однозначно определяется своим максимальным элементом.*

Несмотря на многочисленные попытки, гипотеза до сих пор не доказана, очень хорошее введение и исторический обзор см. в [1].

Геометрия поверхности Маркова. Рассмотрим поверхность X, заданную в аффинном пространстве $\mathbb{A}^3$ уравнением $(*)$. Ее проективное замыкание $\bar{X} \subset \mathbb{P}^3$ является нодальной кубикой с единственной особой точкой, а граничный дивизор – объединение трех прямых, образующих "треугольник".

Отображения t_i являются автоморфизмами поверхности X (как аффинного многообразия). Можно проверить, что они порождают подгруппу $\Gamma_0 \subset \mathrm{Aut}(X)$, изоморфную свободному произведению

$$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

Полная группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(X)$ порождается Γ_0, перестановками и обращениями знака у пары координат [15]. При этом $\mathrm{Aut}(X)$ действует транзитивно на множестве целых точек поверхности X, а ее подгруппа индекса 4, изоморфная $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z})$, действует транзитивно на множестве троек Маркова.

Проекция

$$\Psi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$$

из начала координат является бирациональным отображением, т.е. она взаимно однозначна на непустых открытых по Зарисскому подмножествах $U \subset X$ и $V \subset \mathbb{P}^2$. Более того, Ψ задает вложение $\mathrm{Aut}(X)$ в группу бирациональных преобразований плоскости так, что все элементы сохраняют, с точностью до знака, симплектическую форму

$$\frac{\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v}{uv}.$$

Таким образом, подгруппа индекса 2 в $\mathrm{Aut}(X)$ вкладывается в *симплектическую группу Кремоны* [7].

2. Числа Маркова в теории приближений и теории квадратичных форм

В оригинальной работе Маркова уравнение $(*)$ возникло в связи с задачей о нахождении арифметического минимума бинарных квадратичных форм.

Рассмотрим бинарную квадратичную форму

$$f(x,y) = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2, \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Будем считать, что форма – *неопределенная*, т.е. ее дискриминант

$$D := \beta^2 - 4\alpha\gamma$$

положителен. *Константа Маркова формы* f – это число

$$\mu(f) := \frac{\sqrt{D}}{\min'(f)},$$

где $\min'(f)$ – арифметический минимум:

$$\min'(f) := \min\left\{ \ |f(x,y)| \ \Big| \ x, y \in \mathbb{Z}, \quad (x,y) \neq (0,0) \ \right\}.$$

Спектр Маркова – это множество всех констант Маркова:

$$\mathbb{M} := \big\{\mu(f) \mid f \text{ – бинарная квадратичная форма с } D > 0\big\}.$$

Формы f и f' называются *эквивалентными*, если они получаются друг из друга целочисленной заменой координат. Ясно, что эквивалентные формы имеют один и тот же минимум.

Оказывается, что задача о вычислении арифметических минимумов квадратичных форм тесно связана с теорией диофантовых приближений. Хорошо известная теорема Гурвица утверждает, что для любого иррационального числа θ существует бесконечно много рациональных дробей $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, удовлетворяющих неравенству

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2},$$

при этом константу $\sqrt{5}$ в знаменателе нельзя заменить на бóльшую. В связи с этим возникает следующее естественное определение: *числом Лагранжа* для $\theta \in \mathbb{R}$ называется верхняя грань $\lambda(\theta)$ множества действительных чисел λ таких, что неравенство

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\lambda q^2}. \tag{§}$$

имеет место для бесконечно многих рациональных дробей $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Таким образом, по теореме Гурвица для иррационального θ мы имеем $\lambda(\theta) \geq \frac{1}{\sqrt{5}}$. *Спектр Лагранжа* – это множество

$$\mathbb{L} := \{\lambda(\theta) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$$

всех возможных значений чисел Лагранжа. Числа $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ называются *эквивалентными*, если они принадлежат одной орбите действия группы $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ на $\mathbb{R}$ преобразованиями Мёбиуса. Ясно, что числа Лагранжа эквивалентных действительных чисел равны.

Заметим, что показатель 2 при q в правой части неравенства (§) нельзя увеличить: как было показано К. Ротом (1955 г.), для любого иррационального *алгебраического* число и для любого $\epsilon > 0$ неравенство

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{2+\epsilon}}$$

имеет лишь конечное число решений для взаимно простых p и q.

Результаты Маркова. Пусть $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $m_3 = 5, \ldots$ – упорядоченная последовательность всех чисел Маркова. Положим

$$\lambda_m = \sqrt{9 - 4/m}.$$

Также по упорядоченной тройке Маркова (m, m', m''), $m > m' > m''$ по некоторому явному правилу строится неопределенная квадратичная форма

$$F_{m,m',m''}(x, y).$$

Она называется *формой Маркова.* Принимая на веру гипотезу Фробениуса, можно считать, что $F_{m,m',m''}$ зависит только от максимального элемента: $F_{m,m',m''} = F_m$.

Теорема (Марков)**.** *Для неопределенной бинарной квадратичной формы $f(x, y)$ неравенство $\mu(f) < 3$ выполнено тогда и только тогда, когда f эквивалентна кратному формы F_m для некоторого числа Маркова m.*

Гурвиц заметил, что методы доказательства этой теоремы позволяют непосредственно получить аналогичный результат для диофантовых приближений.

Теорема. *Для иррационального действительного числа θ неравенство $\lambda(\theta) < 3$ выполнено тогда и только тогда, когда $\lambda(\theta) = \lambda_m$, где m – некоторое число Маркова. При этом θ эквивалентно корню уравнения $F_m(x, 1) = 0$.*

В частности, отсюда следует, что на интервале $[0, 3)$ спектры Лагранжа и Маркова дискретны и совпадают:

$$\mathbb{L} \cap [0, 3) = \mathbb{M} \cap [0, 3) = \{\, \lambda_n \,\}\,.$$

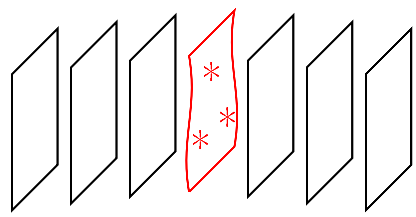
Напротив, в правой части вещественной прямой эти спектры непрерывны: Г. А. Фрейманом в 1975 г. было доказано, что спектры Лагранжа и Маркова содержат интервал $[\lambda_{\mathrm{F}}, +\infty]$ (луч Холла), где

$$\lambda_{\mathrm{F}} := \frac{2221564096 + 283748\sqrt{462}}{491993569} \approx 4.52.$$

С другой стороны, поведение спектров Лагранжа и Маркова на интервале $[3, \lambda_{\mathrm{F}}]$ довольно сложно и до сих пор до конца не изучено.

3. Числа Маркова в геометрии

Вырождения проективной плоскости. Рассмотрим аналитическое семейство $\{S_t\}_{t\in\Delta}$ компактных комплексных поверхностей над диском $\Delta \subset \mathbb{C}$ такое, что при $t \neq 0$ слой S_t изоморфен проективной плоскости $\mathbb{P}^2$. В этой ситуации центральный слой S_0 называется *вырождением* $\mathbb{P}^2$.



В общем случае вырождения $\mathbb{P}^2$ могут быть устроены довольно сложно. М. Манетти [4] поставил проблему классификации вырождений $\mathbb{P}^2$, допускающих лишь *фактороособенности*, т.е. особенности аналитически эквивалентные факторам $\mathbb{C}^2/G$, где $G \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. Эта проблема интересна, важна и мотивирована своими приложениями в теории модулей кривых и поверхностей, а также в программе минимальных моделей.

Напомним, что *взвешенная проективная плоскость* $\mathbb{P}(d_1, d_2, d_3)$ – это множество троек чисел $(x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0)$ с отождествлением:

$$(x_1,\ x_2,\ x_3) = (t^{d_1}x_1,\ t^{d_2}x_2,\ t^{d_3}x_3), \qquad t \in \mathbb{C}^*.$$

Здесь d_1, d_2, d_3 – натуральные числа, называемые *весами*. Мы будем считать, что веса попарно взаимно просты. При $d_1 = d_2 = d_3 = 1$ мы получаем обычную проективную плоскость. В противном случае $\mathbb{P}(d_1, d_2, d_3)$ имеет фактороособенности.

Теорема ([3])**.** *Если взвешенная проективная плоскость является вырождением $\mathbb{P}^2$, то она имеет вид*

$$\mathbb{P}(m_1^2, m_2^2, m_3^2),$$

где (m_1, m_2, m_3) – тройка Маркова. Обратно, каждая взвешенная проективная плоскость $\mathbb{P}(m_1^2, m_2^2, m_3^2)$ является вырождением $\mathbb{P}^2$.

В работе [3] получена полная классификация вырождений $\mathbb{P}^2$, а также аналогичные результаты для вырождений двумерной квадрики и других поверхностей дель Пеццо.

Исключительные векторные расслоения на $\mathbb{P}^2$. Векторное расслоение $\mathscr{E}$ на комплексном неособом проективном алгебраическом многообразии X называется *исключительным*, если

$$\mathrm{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{E})=\mathbb{C} \quad \text{и} \quad \mathrm{Ext}^q(\mathscr{E},\mathscr{E})=0 \quad \text{при } q>0.$$

Упорядоченный набор векторных расслоений $\mathscr{E}_1,\ldots,\mathscr{E}_n$ называется *исключительным*, если все $\mathscr{E}_i$ исключительны и

$$\mathrm{Ext}^q(\mathscr{E}_i,\mathscr{E}_j)=0 \qquad \text{при } i>j \text{ и } q\geq 0.$$

Исключительный называется *полным*, если он порождает ограниченную производную категорию $\mathcal{D}^{\mathrm{b}}(X)$ когерентных пучков на X. Наличие полных исключительных наборов накладывает на многообразие X очень сильные ограничения. Мы рассмотрим только случай проективной плоскости $X=\mathbb{P}^2$. В этом случае любое линейное расслоение является исключительным, а тройка

$$\big(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^2},\ \mathscr{O}_{\mathbb{P}^2}(1),\ \mathscr{O}_{\mathbb{P}^2}(2)\big)$$

– полный исключительный набор. Более того, исключительный набор на $\mathbb{P}^2$ является полным тогда и только тогда, когда он состоит из трех элементов.

В работах А. Н. Рудакова [14] и А. Л. Городенцева и Рудакова [2] был установлен поразительный факт: на множестве полных исключительных наборов векторных расслоений на $\mathbb{P}^2$ определены некоторые преобразования (перестройки), аналогичные перестройкам троек Маркова (†). В частности, ранги расслоений в полных исключительных наборах – это в точности тройки Маркова. Эти результаты имеют обобщения на произвольные поверхности дель Пеццо [11].

Числа Маркова в геометрии Лобачевского. Классическое тождество Фрике утверждает, что для любых матриц A, B, $C=AB\in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ выполнено равенство

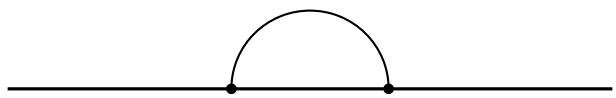
$$\mathrm{tr}(A)^2+\mathrm{tr}(B)^2+\mathrm{tr}(C)^2=\mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(B)\,\mathrm{tr}(C)+\mathrm{tr}(ABA^{-1}B^{-1})+2.$$

Если матрицы целочисленны, а коммутатор $ABA^{-1}B^{-1}$ является параболической матрицей, то $\mathrm{tr}(ABA^{-1}B^{-1})=-2$ и числа

$$\mathrm{tr}(A)/3, \quad \mathrm{tr}(B)/3, \quad \mathrm{tr}(C)/3$$

образуют тройку Маркова. Это наблюдение позволяет переформулировать многие вопросы о числах Маркова в терминах действия модулярной группы $\Gamma=\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ и ее конгруэнц-подгруппы $\Gamma(3)$ на плоскости Лобачевского.

Рассмотрим модель Пуанкаре $\mathbb{H}$ (верхнюю полуплоскость в $\mathbb{C}$) геометрии Лобачевского. При действии гиперболического преобразования $A \in \Gamma(3)$ на замыкании $\bar{\mathbb{H}}$ имеются две вещественные неподвижные точки θ и θ'. Окружность, проходящая через эти точки и перпендикулярная вещественной оси – прямая геометрии Лобачевского,



а ее образ на факторе $\mathbb{H}/\Gamma(3)$ является геодезической γ_A. Оказывается, что γ_A не имеет самопересечений тогда и только тогда, когда $\lambda(\theta), \lambda(\theta') < 3$, а ее длина вычисляется через числа Маркова. Гипотеза единственности также имеет интерпретацию в этих терминах [1]. Такой подход, использующий геометрию Лобачевского, был применен Д. С. Горшковым [9] для того, чтобы передоказать результаты Маркова чисто геометрическими методами.

Числа Маркова в симплектической геометрии. Одна из интересных и важных проблем в симплектической геометрии – вопрос о классификации лагранжевых торов в комплексной проективной плоскости с симплектической формой равной кэлеровой форме стандартной метрики Фубини–Штуди. В недавних работах Р. Виано [8] было получено существенное продвижение в этом направлении. В частности, было построено бесконечное семейство неэквивалентных лагранжевых торов, параметризуемое тройками Маркова.

В заключение отметим, что наш краткий обзор не является полным. Неожиданные применения троек Маркова продолжают появляться в самых разных частях математики. Мы надеемся, что будет ещё много других появлений, а также будут найдены интересные связи между ними. Вот что писал выдающийся советский математик Б. Н. Делоне о магистерской диссертации А. А. Маркова [10]:

> *“Эта работа, весьма высоко оцененная Чебышевым, принадлежит к числу самых острых достижений петербургской школы теории чисел да, пожалуй, и всей русской математики”.*

Список литературы

[1] Aigner Martin. Markov's theorem and 100 years of the uniqueness conjecture. — Springer, Cham, 2013. — P. x+257. — ISBN: 978-3-319-00887-5; 978-3-319-00888-2. — A mathematical journey from irrational numbers to perfect matchings. Access mode: https://doi.org/10.1007/978-3-319-00888-2.

[2] Gorodentsev A. L., Rudakov A. N. Exceptional vector bundles on projective spaces // Duke Math. J. — 1987. — Vol. 54. — P. 115–130.

[3] Hacking Paul, Prokhorov Yuri. Smoothable del Pezzo surfaces with quotient singularities // Compositio Math. — 2010. — Vol. 146, no. 1. — P. 169–192. — Access mode: https://doi.org/10.1112/S0010437X09004370.

[4] Manetti Marco. Normal degenerations of the complex projective plane // J. Reine Angew. Math. — 1991. — Vol. 419. — P. 89–118. — Access mode: https://doi.org/10.1515/crll.1991.419.89.

[5] Markoff A. A. Sur les formes quadratiques binaires indéfinies // Math. Ann. — 1879. — Vol. 15. — P. 381–406. — online; accessed: https://doi.org/10.1007/BF02086269.

[6] Markoff A. A. Sur les formes quadratiques binaires indéfinies // Math. Ann. — 1880. — Vol. 17. — P. 379–399. — online; accessed: https://doi.org/10.1007/BF01446234.

[7] Usnich Alexandr. On the Cremona group and it's subgroups : Ph. D. thesis / Alexandr Usnich ; Université Pierre et Marie Curie - Paris VI,. — 2008. — Access mode: https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00812808.

[8] Vianna Renato Ferreira de Velloso. Infinitely many exotic monotone Lagrangian tori in $\mathbf{CP}^2$ // J. Topol. — 2016. — Vol. 9, no. 2. — P. 535–551. — Access mode: https://doi.org/10.1112/jtopol/jtw002.

[9] Горшков Д. С. Геометрии Лобачевского в связи с некоторыми вопросами арифметики : дис. … канд. наук / Д. С. Горшков ; Ленингр. гос. ун-т. — Ленинград, 1953.

[10] Делоне Б. Н. Петербургская школа теории чисел. — М.–Л. : АН СССР, 1947. — Режим доступа: https://libgen.fun/book/index.php?md5=81efdef57c6b8ed1ffafcfe46a855db6.

[11] Карпов Б. В., Ногин Д. Ю. Трехблочные исключительные наборы на поверхностях дель Пеццо // Изв. РАН. Сер. матем. — 1998. — Т. 62, № 3. — С. 3–38. — Режим доступа: http://mi.mathnet.ru/izv205.

[12] Марков А. А. О бинарных квадратичных формах положительного определителя: Рассуждение А. Маркова : Квалификационная работа магистра / А. А. Марков ; Санкт-Петербург : тип. Имп. Акад. наук. — 1880.

[13] Марков А. А. О бинарных квадратичных формах положительного определителя // УМН. — 1948. — Т. 3, № 5(27). — С. 7–51. — Режим доступа: http://mi.mathnet.ru/umn8757.

[14] Рудаков А. Н. Числа Маркова и исключительные расслоения на $\mathbf{P}^2$ // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1988. — Т. 52, № 1. — С. 100–112. — Режим доступа: http://mi.mathnet.ru/izv1170.

[15] Эль-Хути М. Х. Кубические поверхности марковского типа // Матем. сб. — 1974. — Т. 93(135), № 3. — С. 331–346. — Режим доступа: http://mi.mathnet.ru/msb3405.