Прохоров Ю.Г. Группы бирациональных автоморфизмов и минимальные модели

Юрий Геннадьевич Прохоров, 4 апреля 2013

Я начну с того, что сделаю обзор теории минимальных моделей и вообще бирациональной геометрии. Пусть X — неприводимое алгебраическое многообразие над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Бирациональная геометрия занимается классификацией таких многообразий с точностью до бирациональной эквивалентности. Два многообразия X и X' мы называем *бирационально эквивалентными*, если в них есть открытые по Зарисскому подмножества $U \subset X$ и $U' \subset X'$, которые изоморфны, т.е. есть имеется взаимно однозначное отображение $\varphi : U \to U'$, которое задаётся рациональными алгебраическими функциями, и его обратное отображение тоже задаётся рациональными алгебраическими функциями. Эквивалентная алгебраическая формулировка такая. С каждым алгебраическим многообразием X можно связать его поле $\mathbb{C}(X)$ рациональных функций, и мы отождествляем многообразия X и X', если поля $\mathbb{C}(X)$ и $\mathbb{C}(X')$ изоморфны. Такое отображение $\varphi\colon X \dashrightarrow X'$, определенное не всюду, называется *бирациональным.*

Предположим теперь, что многообразие X проективно и неособо, т.е. вкладывается в $\mathbb{P}^n$, задаётся там как множество нулей некоторой алгебраической системы уравнений и размерность касательного пространства в каждой точке равна размерности многообразия. Если $\dim X = 1$, то это — алгебраическая кривая или, если пользоваться языком комплексной геометрии, компактная риманова поверхность. В этом случае ответ простой: многообразия бирационально изоморфны тогда и только тогда, когда они изоморфны как римановы поверхности; никакой бирациональной геометрии здесь нет. Но уже в размерности 2 ситуация нетривиальна: например, неизоморфные многообразия $\mathbb{P}^2$ и $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ содержат открытое подмножество $\mathbb{A}^2$ — аффинную плоскость (они неизоморфны поскольку неизоморфны их группы когомологий $H^2(X, \mathbb{Z})$).

Один из первых вопросов, который возникает в связи с бирациональной эквивалентностью, — вопрос о рациональности. Иначе говоря, вопрос о том, когда у многообразия есть открытое в топологии Зарисского подмножество, которое можно алгебраически запараметризовать соответствующим числом координат. Если $\dim X = 1$, то у алгебраической кривой X есть дискретный инвариант — ее род g. Кривая рациональна тогда и только тогда, когда её род g равен нулю. Но уже в размерности 2 ответ нетривиален.

Для неособого проективного комплексного многообразия X можно рассмотреть пучок голоморфных k-форм Ω_X^k. Таким образом, $H^0(X, \Omega_X^k)$ — глобально определённые голоморфные формы. Размерность этого пространства — *бирациональный инвариант.* Более того, если есть бирациональное отображение $X \dashrightarrow X'$, то оно индуцирует изоморфизм

$$H^0(X, \Omega_X^k) \cong H^0(X', \Omega_{X'}^k).$$

Можно заменить k-формы на полиформы, т.е. вместо Ω_X^k рассматривать тензорные произведения; факт останется верным:

$$H^0(X, (\Omega_X^1)^{\otimes k}) \cong H^0(X', (\Omega_{X'}^1)^{\otimes k}).$$

В частности, для $n = \dim X$ рассмотрим $\omega_X := \Omega_X^n$ — пучок старших форм, и если мы рассмотрим глобальные сечения его тензорных степеней $H^0(X, \omega_X^{\otimes m})$, то размерность

$$P_m(X) := \dim H^0(X, \omega_X^{\otimes m})$$

называется *плюриродом.* Например, для кривой $g = P_1(X)$. При $m \to \infty$, если числа $P_m(X)$ ненулевые, то они растут приблизительно как $cm^{\varkappa}$ для некоторых положительных c и $\varkappa$. Число $\varkappa = \varkappa(X)$ — целое. Оно называется *кодаировой размерностью* X. Традиционно считается, что $\varkappa = -\infty$, если все числа $P_m(X)$ нулевые. Кодаирова размерность — самый первый и самый грубый инвариант. Для кривых имеем

$$\varkappa = \begin{cases} -\infty & \text{если } g = 0, \\ 0 & \text{если } g = 1, \\ 1 & \text{если } g > 1. \end{cases}$$

Наконец, алгебра

$$R(X) = \bigoplus_{m \geq 0} H^0(X, \omega_X^{\otimes m})$$

также является бирациональным инвариантом. Она называется *канонической алгеброй.*

Теперь я могу сформулировать критерий Кастельнуово.

Теорема. *Неособая проективная поверхность X она рациональна тогда и только тогда, когда $P_2(X) = 0$ и $H^0(X, \Omega_X^1) = 0$.*

Рациональное отображение называется *доминантным* если его образ плотен.

Следствие. *Пусть X – алгебраическая поверхность, для которой есть доминантное отображение $\mathbb{P}^2 \dashrightarrow X$. Тогда поверхность X рациональна.*

Если мы перейдём в высшие размерности, то ситуация становится гораздо более сложной. Оказывается, что никакими численными дифференциально-геометрическими инвариантами рациональные многообразия нельзя отличить от нерациональных. Например, известно, что любая кубическая трёхмерная поверхность $X_3 \subset \mathbb{P}^4$ нерациональна [1], однако все её дифференциально-геометрические инварианты $H^0(X, (\Omega^1_X)^{\otimes m}) = 0$ зануляются; то же самое верно для квартики $X_4 \subset \mathbb{P}^4$ [2].

Более просто изучаемыми с этой точки зрения являются свойства унилинейчатости и рациональной связности. Многообразие X *унилинейчато*, если через его общую точку P проходит рациональная кривая C. Многообразие X *рационально связно*, если для двух общих точек P_1 и P_2 этого многообразия существует рациональная кривая C, проходящая через них. В размерности 2 рациональность поверхности эквивалентна рациональной связности.

Одним из важных технических средств для изучения алгебраического многообразия X является его канонический дивизор. Рассмотрим мероморфную дифференциальную форму ω старшей степени и рассмотрим её дивизор нулей и полюсов $\mathrm{div}(\omega) = K_X$. Он называется *каноническим дивизором.* Этот дивизор выбирается не однозначно, он выбирается с точностью до дивизора нулей и полюсов некоторой рациональной функции. Соответствующий класс эквивалентности называется *каноническим классом.*

На проективном алгебраическом многообразии имеется естественное спаривание между дивизорами и кривыми: для любого дивизора D и любой кривой C определён их индекс пересечения $D{\cdot}C$. При этом от дивизора D требуется, чтобы он (или хотя бы некоторое его кратное nD) был дивизором Картье и тогда$D \cdot C$ — рациональное число. Говорят, что дивизор D *численно эффективен*, если $D{\cdot}C \geq 0$ для любой кривой C.

Теперь я расскажу о теории теории минимальных моделей С. Мори. Идея этой теории состоит в том, чтобы в каждом классе бирациональной эквивалентности найти какой-нибудь выделенный (но возможно не единственный) элемент, который называется минимальной моделью. Теория Мори утверждает, что стартуя с любого неособого проективного многообразия X какой-то явной последовательностью элементарных бирациональных преобразований можно прийти к новому многообразию X', которое имеет, вообще говоря, простейшие особенности — они называются *терминальными особенностями*. При этом выполнено одно из двух, исключающих друг друга условий:

(a) дивизор $K_{X'}$ численно эффективен (тогда X' называется *минимальной моделью*);

(b) существует такое отображение $f\colon X' \to Z$, $0 \le \dim Z < \dim X$, что дивизор $-K_{X'}$ обилен (т.е. строго положителен) на слоях (тогда X'/Z называется *моделью Фано* или моделью Фано–Мори).

Я не буду вдаваться в технические детали определения терминальных особенностей, скажу лишь, что их коразмерность не меньше 3: $\operatorname{codim}\operatorname{Sing}(X) \ge 3$. Таким образом, на поверхностях их нет; в размерности 3 это — изолированные точки. Чтобы построить пример трехмерной терминальной особенности, мы должны взять уравнение $f(x,y,z)=0$ двумерной дювалевской особенности (простейшей особенности типа A_n, D_n, E_n) и немножко его возмутить:

$$f(x,y,z) + tg(x,y,z,t) = 0.$$

Если эта особенность изолирована, она будет терминальной. Это первый тип терминальных особенностей. Второй тип получается как фактор особенностей первого типа по циклической группе, действующей определённым образом. Простейший случай, когда функция g не обращается в нуль в начале координат; в этом случае мы получаем серию терминальных факторособенностей – факторов $\mathbb{C}^3$ по циклическим группам, действующим по правилу

$$(x,y,z) \longmapsto (\varepsilon^a x, \varepsilon y, \varepsilon^{-1} z), \quad \varepsilon = \exp(2\pi i/r), \quad (r,a) = 1.$$

Возвращаясь к программе минимальных моделей и делению на случаи (a)-(b), отметим, что класс многообразий (a) очень большой. Возьмём, например, гладкую гиперповерхность $X = X_d \subset \mathbb{P}^n$ степени d. Канонический дивизор K_X легко вычислить: $K_X = (d - n - 1)H$, где H — гиперплоское сечение. Если $d \ge n+1$, то X — минимальная модель. Такие многообразия данной размерности параметризуются бесконечным числом семейств. Наоборот, многообразия $X = X_d \subset \mathbb{P}^n$, для которых $1 \le d < n+1$, принадлежат конечному числу семейств; это многообразия Фано, они принадлежат классу (b).

Первое наблюдение такое.

Предложение. *Пусть X — неособое проективное многообразие. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *многообразие X унилинейчато;*
(2) *существует отличное от константы отображение $f\colon \mathbb{P}^1 \to X$, для которого f^*T_X (прообраз касательного расслоения) порождается глобальными сечениями;*
(3) *X относится к классу (b), т.е. у него существует модель Фано–Мори $f\colon X' \to Z$.*

Отметим, что эквивалентность (1) $\Longleftrightarrow$ (2) не зависит от программы минимальных моделей (но здесь по существу характеристика нуль). Из унилинейчатости многообразия X следует, что $\varkappa(X) = -\infty$. Есть гипотеза, доказанная в случае $\dim X \le 3$, что верно и обратное: если $\varkappa(X) = -\infty$, то многообразие X унилинейчатое.

Аналогичные утверждения есть и для рациональной связности:

Предложение. *Следующие условия эквивалентны:*
(1) *многообразие X рационально связно;*
(2) *существует отображение $f\colon \mathbb{P}^1 \to X$, для которого пучок f^*T_X обилен (строго положителен);*
(3) *у многообразия X существует модель Фано–Мори $f\colon X' \to Z$, для которой база Z тоже рационально связна (или является точкой).*

Из рациональной связности следует, что $H^0(X,(\Omega^1)^{\otimes n}) = 0$ для всех $n \ge 0$. Есть гипотеза, доказанная при $\dim X \le 3$, что верна и обратная импликация. Более того, для $\dim X = 3$ нужно проверить только, что $\varkappa = -\infty$, $H^0(X,\Omega^1_X) = 0$ и $H^0(X,S^2\Omega^1_X) = 0$; достаточно этих трёх равенств.

Теперь я предположу, что многообразие X определено над произвольным полем $\Bbbk$ характеристики $\operatorname{char}\Bbbk = 0$, и предположу также, что на X действует конечная группа G. Технику, о которой я планирую сейчас обсудить, развили Ю. И. Манин и В. А. Исковских в 70-е годы в связи с арифметическими вопросами [3], [4], [5], [6]. Теория Мори в случае многообразий с действием конечной группы практически ничем не отличается от стандартной: существует такое эквивариантное бирациональное отображение $X \dashrightarrow X'$, определённое над $\Bbbk$, что выполнено одно из двух условий (a), (b) выше. В случае (b) имеется важный подслучай

(b^0) $\dim Z = 0$, т.е. Z — точка. Тогда X — это многообразие Фано с терминальными особенностями, у которого $\operatorname{Pic}(X)^G = \mathbb{Z}$.

Рассмотрим подслучай (b^0) подробнее. Тогда при $\dim X = 1$, X — схема Севери–Брауэра, т.е. $X \otimes \bar{\Bbbk} \simeq \mathbb{P}^1$, а при $\dim X = 2$, X — так называемая поверхность дель Пеццо; их в данной ситуации существует 8 типов (в общем случае). В размерности 3 на X могут появляться особенности и ситуация становится гораздо сложнее, но всё равно число типов многообразий Фано с терминальными особенностями тоже конечно. Если $\dim X \geq 4$, то конечность числа типов — это гипотеза Борисова–Алексеева–Борисова:

Гипотеза. Многообразия Фано фиксированной размерности n с терминальными особенностями принадлежат конечному числу алгебраических семейств.

Это утверждение правдоподобно, потому что оно верно в размерности $n \leq 3$ и для неособых многообразий Фано в любой размерности.

Ж. П. Серр задал такой вопрос.

Вопрос. Рассмотрим поле K, которое конечно порождено над $\mathbb{Q}$, и рассмотрим группу его автоморфизмов $\mathrm{Aut}(K)$. Верно ли, что эта группа обладает свойством

BFS: конечные подгруппы имеют ограниченный порядок.

В нашей совместной работе с К. Шрамовым [7] доказано, что ответ положительный в случае, когда степень трансцендентности K над $\mathbb{Q}$ не превосходит 3. Идея доказательства — следующая. Для поля K существует модель — неособое проективное многообразие X (над каким-то числовым полем $\Bbbk$), у которого поле рациональных функций $\Bbbk(X)$ изоморфно K. Мы можем считать, что группа $G \subset \mathrm{Aut}(K)$ действует на X бирегулярно, действует настоящими автоморфизмами. Действительно, поскольку группа конечна G, то можно предъявить какое-то аффинное многообразие X^0, на котором G действует бирегулярно, затем правильно замкнуть X^0 и разрешить особенности. При этом нужно существование эквивариантного разрешение особенностей, оно доказано в настоящее время. Далее применяется эквивариантная программа минимальных моделей: $X \dashrightarrow X'$. Получаем два случая: (a) и (b). В случае (a) многообразие X' — минимальная модель (дивизор $K_{X'}$ численно эффективен) и группа G действует на X (бирегулярно). Минимальная модель не единственна, но известно, что любые две минимальных модели X' и X'' изоморфны в коразмерности 1, т.е. существует бирациональное отображение $X' \dashrightarrow X''$, ограничение которого на открытые по Зарисскому множества $U' \subset X'$ и $U'' \subset X''$ — изоморфизм, а дополнения этих множеств не содержат дивизоров (для размерности 3 эти дополнения — кривые). В частности, $H^2(X', \mathbb{Z}) = H^2(X'', \mathbb{Z})$. Эта группа когомологий — фиксированная решётка; на ней действует группа G. Коядро имеет ограниченный порядок по теореме Минковского: конечные подгруппы в $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$

ограничены, т.е. порядок таких групп ограничен константой, зависящей только от n. Таким образом, переходя к подгруппе конечного индекса, можно считать, что G тривиально действует на когомологиях. Далее рассматриваются два случая в зависимости от того равна или нет нулю иррегулярность $q(X) = H^0(X, \Omega^1_X)$. В первом случае решётка Пикара $\mathrm{Pic}(X')$ вкладывается в $H^2(X', \mathbb{Z})$, поэтому группа фиксирует обильный класс. Следовательно, можно считать, что многообразие X' эквивариантно вложено в $\mathbb{P}^n$. Это вложение определено над числовым полем, поэтому снова по теореме Минковского порядок группы ограничен. Случай, когда $q(X) \neq 0$, более тонкий. Согласно аргументам, приведенным выше, мы можем считать, что G эффективно действует на $\mathrm{Pic}(X')$. Рассмотрим, например, случай, когда X — абелево многообразие. Тогда требуемое утверждение — это следствие знаменитой теоремы Морделла: группа его $\Bbbk$-точек абелева многообразия, определённого над числовым полем $\Bbbk$ конечно порождена. В общем случае нужно рассмотреть отображение Альбанезе.

Второе приложение — это тоже вопрос Ж. П. Серра [8], [9] о жордановости групп бирациональных автоморфизмов. Пусть далее $\Bbbk = \mathbb{C}$. Напомним классическую теорему Жордана.

Теорема. *Рассмотрим группу $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ и любую её конечную подгруппу G. Тогда существует нормальная абелева подгруппа $A \subset G$ ограниченного индекса $[G : A] < \mathrm{const}(n)$.*

В.Л. Попов [10] сформулировал такое определение:

Определение. Рассмотрим группу Γ. Назовём её *жордановой*, если любая её конечная подгруппа G содержит нормальную абелеву подгруппу A ограниченного индекса, $[G : A] < \mathrm{const}$.

У любого алгебраического многообразия X есть группа бирациональных отображений в себя $\mathrm{Bir}(X)$. В частности группа $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ называется *группой Кремоны* и часто обозначается $\mathrm{Cr}_n(\mathbb{C})$. Ж. П. Серр [8] доказал жордановость группы $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ и задал вопрос о том, верно ли это то же самое для $\mathrm{Cr}_n(\mathbb{C})$, $n > 2$. Вопрос можно обобщить, спросив, когда группа $\mathrm{Bir}(X)$ бирациональных изоморфизмов алгебраического многообразия жорданова? В размерности 1, для любой кривой X, легко проверяется, что группа $\mathrm{Bir}(X)$ жорданова. В размерности 2 ответ уже не тривиален. Оказалось [10], что группа $\mathrm{Bir}(X)$ почти всегда жорданова, за одним исключением. Исключительный случай — поверхность, бирационально изоморфная $\mathbb{P}^1 \times E$, где E — эллиптическая кривая. Этот пример построил Ю. Зархин [11].

В совместной работе автора с К. Шрамовым [12] доказано, что для рационально связного многообразия X группа $\mathrm{Bir}(X)$ жорданова, при условии выполнимости гипотезы Борисова–Алексеева–Борисова. Более того, группа $\mathrm{Bir}(X)$ равномерно жорданова: константа const в определении не зависит от многообразия X, а зависит только от размерности. Идея доказательства — похожая. Чтобы применить индукцию по размерности, мы должны немного усилить утверждение. Дополнительно наложим такое условие: X содержит собственное рационально связное подмногообразие V, инвариантное относительно абелевой подгруппы A, которая фигурирует в определении. Как и выше, можно считать, что группа G действует бирегулярно на проективном многообразии X. Далее применим эквивариантную программу минимальных моделей: $X \dashrightarrow X'$. Поскольку X рационально связно, мы не можем получить в этом случае минимальную модель. Поэтому X' имеет структуру модели Фано–Мори $f\colon X' \to Z$, где база Z тоже рационально связна. Если Z — точка, то X' — многообразие Фано. Гипотеза Борисова–Алексеева–Борисова даёт нам, что X' принадлежит к конечному числу алгебраических семейств, поэтому X' допускает эквивариантное вложение $X' \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ для некоторого ограниченного n. Следовательно, группа G вкладывается в PGL_{n+1} и мы можем применить стандартную теорему Жордана. Этот случай простой (по модулю конечности семейств многообразий Фано).

Второй случай технически более сложен, но неформально — это просто индуктивный шаг. Группа G действует на базе Z, и по предположению индукции есть собственное открытое подмножество $W \subset Z$, инвариантное рационально связное многообразие. Технически сложный элемент доказательства — это то, что мы можем поднять W в X' и получить там собственное рационально связное подмногообразие. Далее мы делаем шаг индукции и работаем с многообразиями меньшей размерности. Помимо гипотезы Борисова–Алексеева–Борисова здесь важны два момента:

(1) рационально связные многообразия ведут себя хорошо при морфизмах: если есть расслоение $V \to W$, у которого база и слой рационально связны, то и многообразие V также рационально связно [13];
(2) связность Шокурова.

Проиллюстрируем последнее на простом примере. Предположим, что $Z = \mathbb{P}^1$ и $\dim X = 3$. Тогда общий слой — поверхность дель Пеццо. Группа G действует на $\mathbb{P}^1$, подгруппа $G' \subset G$ конечного индекса имеет неподвижную точку $W \in Z = \mathbb{P}^1$. Эта подгруппа действует на слое F над точкой W. Слой может не быть рационально связным многообразием. Но тогда множество V особенностей пары (X, F), которые хуже, чем лог-терминальные непусто. По принципу Шокурова оно связно. Более того, оно инвариантно и рационально связно. Это и есть конструкция подъема $V \subset X$, $f(V) = W$. Например, пусть общий слой f — кубическая поверхность. Она может вырождаться в кубический конус. Кубический конус не является рационально связной поверхностью, но у него имеется вершина. Она одна и поэтому инвариантна.

Последнее, что я хочу отметить, — это несколько примеров в размерности 3, связанных с двумерной ситуацией. Теорема Жордана наводит на мысль о том, что конечные подгруппы в группе Кремоны $\mathrm{Cr}_n(\mathbb{C})$ малого ранга могут быть классифицированы. При $n = 2$ это долгая история, начинающаяся с классических работ Бертини (может быть, ещё раньше). Недавно она в работе Долгачёва и Исковских [14] была более или менее завершена (но всё равно там осталась масса проблем). При $n = 3$ вопрос открыт, однако и здесь есть надежда получить интересные результаты. Наблюдается аналогия с конечными линейные группы: в малых размерностях их можно классифицировать, а в высших размерностях это теряет смысл.

В маломерных случаях возникает замечательная геометрия, связанная с действием на минимальных моделях. Пусть $G \subset \mathrm{Cr}_n(\mathbb{C})$ – конечная подгруппа. Как и выше мы можем считать, что G бирегулярно действует на проективном многообразии X. Более того, X рационально, поэтому мы можем считать, что X имеет структуру модели Фано–Мори $X \to Z$. Если Z — не точка, то наша группа G является расширением

$$1 \to G_F \longrightarrow G \longrightarrow G_Z \to 1.$$

Изучение возможностей для таких расширений – довольно сложный вопрос. Например этому посвящена большая часть работы Долгачёва и Исковских [14]. Однако, несмотря на техническую сложность вопроса, нет идейных трудностей в изучении этого случая.

Поэтому самый интересный случай, когда Z — точка. При $\dim X = 2$; X — поверхность дель Пеццо, их 8 типов (появляющихся в нашей ситуации). Для тех, кто знаком с арифметической ситуацией [5], следующая конструкция не является новой. Напомним, что степень поверхности дель Пеццо – это квадрат канонического дивизора $d := K_X^2$. Двумерные целочисленные когомологии $H^2(X, \mathbb{Z})$ являются решеткой ранга $r := 10 - d$. В этой решётке есть выделенный элемент — канонический класс $[K_X]$. Его ортогональное дополнение $K_X^\perp$ в пространстве $H^2(X,\mathbb{R})$ уже будет вещественным пространством размерности $r-1$, на котором форма пересечения отрицательно определена. Там есть выделенные элементы α, для которых $\alpha^2 = -2$, и они образуют систему корней Δ (в классическом смысле). В зависимости от степени d системы корней получаются такие:

d	1	2	3	4	5	6
Δ	E_8	E_7	E_6	D_5	A_4	$A_1 \times A_2$

При $d \le 5$ любая подгруппа группы автоморфизмов $G \subset \mathrm{Aut}(X)$ естественным образом вкладывается в группу Вейля системы корней: $G \hookrightarrow W(\Delta)$. Это первое условие, арифметическое. Можно рассмотреть также геометрические условия: например, при $d = 1$ на X имеется некоторая выделенная точка. Действительно, антиканоническая линейная система $|-K_X|$ – пучок эллиптических кривых с одной базисной точкой, которая должна быть инвариантна. Группа G действует в касательном пространстве этой точки. Следовательно, она имеет точное двумерное представление. Комбинируя эти два условия, можно получить полное описание всех подгрупп $G \subset \mathrm{Aut}(X)$.

В идеале хотелось бы получить что-то подобное в размерности 3. Многое здесь перестает работать, но кое-что и нет. Рассмотрим такой пример. Пусть X — трехмерное многообразие Фано такое, что K_X — дивизор Картье, т.е. особенности X — гиперповерхностные. Как и выше, рассмотрим решетку $H^2(X,\mathbb{Z})$. Ясно, что мы можем записать $-K_X = rH$ для некоторых $r \in \mathbb{Z}$ и $H \in H^2(X,\mathbb{Z})$. Максимальное r с таким свойством называется *индексом* многообразия Фано X. Линейная система $|H|$ непуста и содержит неособую поверхность, которую мы также обозначим через H.

Тогда $r = 1$, 2, 3 или 4, причем $r = 4$ только в случае $X = \mathbb{P}^3$. Если $r = 3$, то $X = Q_2 \subset \mathbb{P}^4$ — квадрика (возможно особая). Таким образом, при $r \ge 3$ содержательного в вопросе об автоморфизмах X нет. Первый содержательный случай: $r = 2$. Целое число $d = H^3$ называется *степенью* X. При $r = 2$ оно принимает значения $1 \le d \le 7$. Несложно видеть, что тогда H — поверхность дель Пеццо.

Нас должен интересовать случай особого X по двум причинам. Во-первых, многообразия Фано индекса 2 степени $d \le 3$ нерациональны, а для приложений к группе Кремоны важны только рациональные многообразия. Во-вторых, за двумя исключениями, решетка $H^2(X,\mathbb{Z})$ одномерна и естественное представление автоморфизмов в этой решетке тривиально. По некоторым причинам, это приводит к тому, что группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(X)$ довольно "мала". В особом же случае мы можем рассматривать другую, большую решетку $H_2(X,\mathbb{Z})$ (группу классов дивизоров Вейля). На ней имеется скалярное произведение $\langle D_1, D_2\rangle = D_1 \cdot D_2 \cdot H$ сигнатуры $(1, \rho - 1)$. За небольшим числом тривиальных исключений, в пространстве $H_2(X,\mathbb{R})$, как и в двумерном случае, возникает система корней Δ и естественное представление группы автоморфизмов в группе Вейля. Все возможности для Δ классифицированы [15] в зависимости от степени d. Рассмотрим, например, случай, когда размерность $H_2(X,\mathbb{R})$ – максимально возможная (равна $9 - d$).

d	1	2	3	4
Δ	E_7	D_6	A_5	$A_1 \times A_3$
$\#\,\mathrm{Sing}(X)$	28	16	10	6

При $d = 4$ многообразие Фано X является пересечением двух специальных квадрик

$$x_1^2 - x_2^2 = x_3^2 - x_4^2 = x_5^2 - x_6^2$$

в $\mathbb{P}^4$. Группа автоморфизмов X бесконечна и содержит непрерывную часть.

При $d = 3$ многообразие X – знаменитая кубика Сегре

$$\left\{\sum x_i = \sum x_i^3 = 0\right\} \subset \mathbb{P}^5.$$

Ее группа автоморфизмов изоморфна симметрической группе $\mathfrak{S}_6$.

При $d = 2$ X реализуется как двулистное накрытие $\mathbb{P}^3$ разветвленное в куммеровой поверхности $B_4 \subset \mathbb{P}^3$. Имеется трехмерное семейство таких многообразий и группа автоморфизмов зависит от выбора конкретного представителя, но в любом случае она содержит инволюцию Галуа двойного накрытия. Аналогичное описание имеется для $d = 1$.

Для многообразий Фано индекса 1 ситуация становится еще более интересной. В этом случае общий антиканонический дивизор $H \in |-K_X|$ является поверхностью типа K3 и, как и выше, имеется примитивное вложение решеток $H_2(X,\mathbb{Z}) \hookrightarrow H^2(H,\mathbb{Z})$. Несмотря на то, что решетка K3 $H^2(H,\mathbb{Z})$ изучена очень хорошо, этот случай пока не исследован. Таким образом, техника изучения конечных подгрупп в пространственной группе Кремоны в находится в процессе активного развития. Тем не менее, интересные классы подгрупп могут изучены и в настоящее время (например, в работе

[16] классифицированы простые подгруппы в $\mathrm{Cr}_3(\mathbb{C})$). Несопряженность подгрупп в группах Кремоны может быть доказана сравниванием множеств неподвижных точек [17], вычислением когомологий [18] или методом максимальных особенностей [19].

Список литературы

[1] *Clemens C. H., Griffiths P. A.* The intermediate Jacobian of the cubic threefold // *Ann. of Math. (2).* — 1972. — Vol. 95. — Pp. 281–356.

[2] *Исковских В. А., Манин Ю. И.* Трехмерные квартики и контрпримеры к проблеме Люрота // *Матем. сб.* — 1971. — Т. 86(128), №1(9). — С. 140–166.

[3] *Manin Y. I.* Rational surfaces over perfect fields // *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* — 1966. — no. 30. — Pp. 55–113.

[4] *Манин Ю. И.* Рациональные поверхности над совершенными полями. II // *Матем. сб.* — 1967. — Т. 72(114), № 2. — С. 161–192.

[5] *Манин Ю. И.* Кубические формы: Алгебра, геометрия, арифметика. — Москва: Наука, 1972.

[6] *Исковских В. А.* Минимальные модели рациональных поверхностей над произвольными полями // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* — 1979. — Т. 43, № 1. — С. 19–43.

[7] *Prokhorov Y., Shramov C.* Jordan property for groups of birational selfmaps // *ArXiv e-print.* — 2012. — Vol. 1307.1784.

[8] *Serre J.-P.* A Minkowski-style bound for the orders of the finite subgroups of the Cremona group of rank 2 over an arbitrary field // *Mosc. Math. J.* — 2009. — Vol. 9, no. 1. — Pp. 193–208.

[9] *Serre J.-P.* Le groupe de Cremona et ses sous-groupes finis // *Séminaire Bourbaki, Nov. 2008, 61-'eme anné.* — 2008-2009. — no. 1000.

[10] *Popov V. L.* On the Makar-Limanov, Derksen invariants, and finite automorphism groups of algebraic varieties. // Peter Russell's Festschrift, Proceedings of the conference on Affine Algebraic Geometry held in Professor Russell's honour, 1–5 June 2009, McGill Univ., Montreal. — Vol. 54 of *Centre de Recherches Mathématiques CRM Proc. and Lect. Notes.* — 2011. — Pp. 289–311.

[11] *Zarhin Y. G.* Theta groups and products of abelian and rational varieties // *arXiv:math.* — 2010. — Vol. 1006.1112.

[12] *Prokhorov Y., Shramov C.* Jordan property for Cremona groups // *ArXiv e-print.* — 2012. — Vol. 1211.3563.

[13] *Graber T., Harris J., Starr J.* Families of rationally connected varieties. // *J. Am. Math. Soc.* — 2003. — Vol. 16, no. 1. — Pp. 57–67.

[14] *Dolgachev I. V., Iskovskikh V. A.* Finite subgroups of the plane Cremona group // Algebra, arithmetic, and geometry: in honor of Yu. I. Manin. Vol. I. — Boston, MA: Birkhäuser Boston Inc., 2009. — Vol. 269 of *Progr. Math.* — Pp. 443–548. `http://dx.doi.org/10.1007/978-0-8176-4745-2`.

[15] *Prokhorov Y.* G-Fano threefolds, I // *Adv. Geom.* — 2013. — Vol. 13, no. 3. — Pp. 389–418. `http://dx.doi.org/10.1515/advgeom-2013-0008`.

[16] *Prokhorov Y.* Simple finite subgroups of the Cremona group of rank 3 // *J. Algebraic Geom.* — 2012. — Vol. 21, no. 3. — Pp. 563–600.

[17] *Прохоров Ю. Г.* О бирациональных инволюциях $\mathbf{P}^3$ // *Изв. РАН. Сер. матем.* — 2013. — Т. 77, № 3. — С. 199–222.

[18] *Bogomolov F., Prokhorov Y.* On stable conjugacy of finite subgroups of the plane Cremona group, I // *Cent. European J. Math.* — 2013. — Vol. 11, no. 12. — Pp. 2099–2105.

[19] *Cheltsov I., Shramov C.* Five embeddings of one simple group // *Trans. Amer. Math. Soc.* — to appear. — ArXiv e-print 0910.1783. http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9947-2013-05768-6.