2017/2018 учебный год, осень, НОЦ МИАН
курс "Трехмерные многообразия Фано".
Задачи (для оценки "5" нужно набрать 15 баллов #).

1. (# 1) Найти все поверхности дель Пеццо, являющиеся полными пересечениями гиперповерхностей в грассманианах.

2. (# 1) Докажите, что раздутие точки на $\mathbb{P}^n$ является многообразием Фано. Когда раздутие $m \geq 2$ точек на $\mathbb{P}^n$ является многообразием Фано?

3. (# 4) Пусть X – проективная поверхность и пусть $C \subset X$ – обильный эффективный дивизор такой, что $p_a(C) \leq 1$. Докажите, что X – или поверхность дель Пеццо или рациональная линейчатая поверхность.

4. (# 2) Пусть X – проективная рациональная поверхность такая, что $-K_X \cdot C > 0$ для любой кривой C. Докажите, что X – поверхность дель Пеццо.

5. (# 2) Докажите, что раздутие прямой на $\mathbb{P}^n$ является многообразием Фано.

6. (# 3) Пусть $f : X \to \mathbb{P}^3$ – раздутие неособой кривой C. Найдите достаточное условие того, что X – многообразие Фано.

7. (# 2) Найти все поверхности дель Пеццо, являющиеся полными пересечениями гиперповерхностей в произведении проективных пространств $\mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_l}$.

8. (# 2) Найти все трехмерные многообразия Фано, являющиеся полными пересечениями гиперповерхностей в произведении проективных пространств $\mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_l}$.

9. (# 1) Пусть $X = X_3 \subset \mathbb{P}^4$ – неособая поверхность степени 3. Докажите, что X – поверхность дель Пеццо.

10. (# 4) Пусть X – неособое трехмерное многообразие и пусть D – дивизор с простыми нормальными пересечениями на X. Предположим, что дивизор $-(K_X + D)$ обилен. Вычислите многочлен $\chi(X, \mathscr{O}_X(-t(K_X + D)))$. *Указание.* Воспользоваться теоремой Каваматы-Фивега об обращении в нуль.

11. (# 5) Пусть X – неособое трехмерное многообразие и пусть D – дивизор с простыми нормальными пересечениями на X. Предположим, что дивизор $-(K_X + D)$ обилен. Докажите, что линейная система $|-(K_X + D)|$ содержит неособый дивизор.

12. (# 5) Обобщить теорему о существовании неособой кривой в $|-K_X|$ для почти поверхности дель Пеццо X (т.е. $-K_X$ численно эффективен и объемен).

13. (# 5) Пусть X – поверхность дель Пеццо и пусть A – обильный дивизор на X. Покажите, что линейная система $|A|$ содержит неособую кривую.

14. (# 5) Пусть X – поверхность типа K3 и пусть A – обильный дивизор на X. Покажите, что для общего дивизора $D \in |A|$ пара (X, D) логтерминальна.

15. (# 5) Пусть X – n-мерное многообразие Фано индекса $\iota(X) \geq n$. Покажите, что линейная система $|-\frac{1}{\iota}K_X|$ содержит неособый дивизор.

16. (# 3) Пусть (S, Δ) – логповерхность дель Пеццо. Покажите, что S рациональна.

17. (# 4) Пусть X – неособая проективная поверхность такая, что $-K_X$ численно эффективен. Докажите, что имеет место одно из следующих:
   (a) $K_X \equiv 0$ (численно тривиален);
   (b) X рациональна;
   (c) X бирационально изоморфно линейчатой поверхности над эллиптической кривой.

18. (# 5) Пусть Z – трехмерное неособое многообразие и пусть $f : X \to Z$ – раздутие неособой кривой $C \subset Z$. Предположим, что X – многообразие Фано. Докажите, что дивизор $-K_Z$ численно эффективен. Верно ли, что Z – также многообразие Фано?

19. (# 4) Пусть Z – трехмерное неособое многообразие и пусть $f : X \to Z$ – раздутие неособой кривой $C \subset Z$. Предположим, что X – многообразие Фано, а Z таковым не является. Докажите, что кривая C рациональна.

20. (# 3) Пусть X – трехмерное многообразие Фано и пусть $f : X \to Z$ – гладкий морфизм на поверхность. Докажите, что Z – поверхность дель Пеццо. *Указание.* Можно пользоваться теоремой о неособом дивизоре.

21. (# 4) Пусть X – трехмерное многообразие Фано и пусть $f : X \to Z$ – морфизм на поверхность, все слои которого одномерны. Докажите, что Z – поверхность дель Пеццо.

22. (# 3) Вычислите $h^{1,2}(X)$ для трехмерного многообразия дель Пеццо степени 1.

23. (# 3) Вычислите $h^{1,2}(X)$ для трехмерного многообразия дель Пеццо степени 2.

24. (# 3) Вычислите $h^{1,2}(X)$ для трехмерной кубики в $\mathbb{P}^4$.

25. (# 3) Вычислите $h^{1,2}(X)$ для трехмерного пересечения двух квадрик в $\mathbb{P}^5$.

26. (# 3) Пусть $X = X_4 \subset \mathbb{P}^5$ – пересечение двух квадрик. Пусть $L \subset X$ – прямая и пусть $f : \tilde{X} \to X$ – ее раздутие. Каков тип второго экстремального стягивания на $\tilde{X}$?

27. (# 3) Пусть $X = X_3 \subset \mathbb{P}^4$ – кубика. Пусть $L \subset X$ – прямая и пусть $f : \tilde{X} \to X$ – ее раздутие. Каков тип второго экстремального стягивания на $\tilde{X}$?