Алгебраические кривые
Список задач
Осень 2019 г.

(1) (1%) Найдите максимальное множество точек кривой $X \subset \mathbb{A}^2$, заданной уравнением $y^2 - x^2 - x^3 = 0$, в которых рациональная функция $f = y/x$ будет регулярной. Ответ обоснуйте.

(2) (1%) Найдите максимальное множество точек кривой $X \subset \mathbb{A}^2$, заданной уравнением $x^2 + y^2 = 1$, в которых рациональная функция $f = (1-y)/x$ будет регулярной. Ответ обоснуйте.

(3) (2%) Рассмотрим плоскую кривую X, заданную уравнением $x^2 - y^3 = 0$ в $\mathbb{A}^2$. Опишите локальное кольцо $\mathscr{O}_{P,X}$, где $P = (0,0)$. Докажите, что это кольцо не факториально (т.е. в нем не имеет место однозначность разложения на неприводимые множители).

(4) (2%) Рассмотрим плоскую кривую X, заданную уравнением $x^3 + x^2 + y^2 = 0$ в $\mathbb{A}^2$. Опишите локальное кольцо $\mathscr{O}_{P,X}$, где $P = (0,0)$. Докажите, что это кольцо не факториально.

(5) (1%) Факториально ли локальное кольцо начала координат квадратичного конуса $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ в $\mathbb{A}^3$?

(6) (1%) Пусть $X = \{xy - z^2 = 0\} \subset \mathbb{A}^3$ – аффинный квадратичный конус и пусть $L = \{x = z = 0\}$ – прямая на нем. Докажите, что дивизор L не является локально главным.

(7) (1%) Пусть $X = \{xy - zt = 0\} \subset \mathbb{A}^4$ – аффинный квадратичный конус и пусть $L = \{x = z = 0\}$ – плоскость на нем. Докажите, что дивизор L не является локально главным.

(8) (1%) Опишите дивизоры на произведении проективных пространств $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$.

(9) (1%) Докажите, что $\Omega^k[\mathbb{P}^n] = 0$.

(10) (2%) Пусть $X = \{x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{A}^2$ – плоская аффинная коника. Вычислите $\Omega^1[X]$.

(11) (3%) Найдите базис в пространстве глобальных голоморфных форм на плоской проективной кривой $x_0^5 + x_1^5 + x_2^5 = 0$.

(12) (2%) Пусть t – неоднородная координата на $\mathbb{P}^1$. Рассмотрим рациональную форму $\omega := \frac{p(t)}{q(t)}dt$, где p и q – многочлены. Найдите точки, в которых ω не является регулярной.

(13) (1%) Постройте нормализацию плоской кривой $y^2 - x^3 = 0$.

(14) (2%) Постройте нормализацию проективного замыкания кривой $y^2 = f(x)$, где $f(x)$ – многочлен четной степени без кратных корней.

(15) (4%) Найдите базис в пространстве глобальных голоморфных форм на проективной модели аффинной гиперэллиптической кривой $y^2 = f(x)$, где $f(x)$ – многочлен четной степени без кратных корней.

(16) (2%) Докажите, что (неособая) плоская кривая не является гиперэллиптической.

(17) (3%) Пусть X – гиперэллиптическая кривая рода g над $\mathbb{C}$ и пусть $X \to \mathbb{P}^1$ – соответствующее двулистное накрытие с точками ветвления $P_1, \ldots, P_{2g+2} \in \mathbb{P}^1$. Какой подгруппе в фундаментальной группе $\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{P_1, \ldots, P_{2g+2}\})$ соответствует накрытие $X \to \mathbb{P}^1$?

(18) (2%) Кривая называется тригональной, если существует конечный морфизм $X \to \mathbb{P}^1$ степени 3. Докажите, что кривая рода $g \geq 4$ не может быть одновременно гиперэллиптической и тригональной.

(19) (2%) Когда кривая бистепени (a, b) на $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ является гиперэллиптической?

(20) (2%) Когда кривая бистепени (a, b) на $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ является тригональной?

(21) (3%) Покройте $\mathbb{F}_n$ аффинными картами и найдите в явном виде рациональную дифференциальную форму. Получите отсюда формулу для канонического класса.

(22) (3%) Пусть C – неособая кривая на $\mathbb{F}_n$ такая, что $C \sim a\Sigma + bF$. Когда эта кривая является гиперэллиптической?

(23) (3%) Пусть C – неособая кривая на $\mathbb{F}_n$ такая, что $C \sim a\Sigma + bF$. Когда эта кривая является тригональной?

(24) (2%) Выведите формулы для степени и рода несобой кривой, лежащей на конусе $S = S_d \subset \mathbb{P}^{d+1}$ над рациональной нормальной кривой $C_d \subset \mathbb{P}^d$.

(25) (3%) Когда конус $S = S_d \subset \mathbb{P}^{d+1}$ над рациональной нормальной кривой $C_d \subset \mathbb{P}^d$ содержит эллиптическую кривую?

(26) (3%) Пусть $C = C_4 \subset \mathbb{P}^3$ – эллиптическая кривая степени 4. Докажите, что она содержится в (не единственной) поверхности степени 3.

(27) (3%) Пусть $C = C_6 \subset \mathbb{P}^5$ – эллиптическая кривая степени 6. Докажите, что она содержится в (не единственной) поверхности Веронезе.

(28) (1%) Докажите, что любая эллиптическая кривая может быть вложена в $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ как кривая бистепени $(2, 2)$.

(29) (5%) Пусть $C = C_4 \subset \mathbb{P}^3$ – эллиптическая кривая степени 4 и пусть $\mathscr{P} = \langle Q_1, Q_2 \rangle$ – соответствующий пучок квадрик.

Вырожденные квадрики в пучке определяют еще одну эллиптическую кривую $\tilde{C}$. Как соотносятся между собой C и $\tilde{C}$?

(30) (2%) При каких n поверхность $\mathbb{F}_n$ может содержать эллиптическую кривую?

(31) (2%) Покажите, что группа автоморфизмов общей кривой рода $g = 4$ тривиальна.

(32) (2%) Может ли кривая рода 3 иметь автоморфизм порядка 5?

(33) (3%) Может ли группа автоморфизмов кривой рода 10 быть изоморфной $\mathfrak{S}_6$?

(34) (3%) Докажите, что оценка Гурвица не достигается для гиперэллиптических кривых. Каков может быть порядок максимальный группы автоморфизмов в этом случае?

(35) (4%) Докажите, что оценка Гурвица не достигается в случае кривых рода 4.

(36) (4%) Докажите, что оценка Гурвица не достигается в случае кривых рода 5.

(37) (2%) Докажите, что оценка Гурвица не может достигаться для циклической группы $\mathrm{Aut}(X)$.

(38) (2%) Пусть X – негиперэллиптическая кривая рода 4, имеющая ровно один тригональный линейный ряд $\mathfrak{g}^1_3$. Опишите ее каноническую модель. Ответ обоснуйте.

(39) (2%) Покажите, что каноническая модель $X = X_{2g-2} \subset \mathbb{P}^{g-1}$ негиперэллиптической кривой рода $g \geq 5$ не может лежать на конусе над рациональной нормальной кривой $C_{g-2} \subset \mathbb{P}^{g-2}$.

(40) (2%) Покажите, что неособая плоская квинтика (кривая степени 5) не является тригональной. Опишите ее каноническую модель.

(41) (2%) Пусть $X = X_8 \subset \mathbb{P}^4$ – негиперэллиптическая кривая рода 5. Покажите, что X является тригональной тогда и только тогда, когда она бирационально эквивалентна плоской квинтике, имеющей обыкновенную двойную точку или простой касп.