Алгебраические поверхности
Список задач
Осень 2020 г.

§ 1. Общие факты

(1) Докажите, что неособая поверхность $F \subset \mathbb{P}^3$ степени $d \geq 4$ может содержать лишь конечное число прямых.

(2) Докажите, что неособая поверхность $F \subset \mathbb{P}^3$ степени $d \geq 4$ не содержит (-1)-кривых.

(3) Пусть $X \subset \mathbb{P}^3$ – неособая поверхность степени $d \geq 2$, $d \neq 4$. Докажите, что $\mathrm{Aut}(X) \subset PGL(4)$.

(4) Покажите, что не существует проективных поверхностей с $p_g = P_2 = 1$, $q = 0$.

(5) Докажите, что группа автоморфизмов нерациональной поверхности с $q = 0$ не более чем счетна.

(6) Пусть X – поверхность такая, что антиканоническая линейная система $|-K_X|$ непуста. Каков бирациональный тип поверхности X? В каких случаях кривая $D \in |-K_X|$ может быть несвязна?

(7) Пусть C – кривая рода 2. Найдите минимальную модель для симметрического квадрата S^2C.

(8) Докажите, что компактная комплексная поверхность с $\kappa = 0$, $p_g = 0$ и $q = 0$ проективна (и ее минимальная модель является поверхностью Энриквеса).

(9) Докажите, что компактная комплексная поверхность с $b_1 = 0$, $b_2 = 1$, проективна. Она или рациональна (и $\simeq \mathbb{P}^2$) или является поверхностью общего типа.

(10) Вычислите канонический класс проективного пространства произвольной размерности.

(11) Пусть $X = X_1 \times X_2$ и пусть $p_i : X \to X_i$ – проекции. Докажите формулу $K_X = p_1^* K_{X_1} + p_2^* K_{X_2}$.

(12) Вычислите индекс самопересечения диагонали на поверхности $X = C \times C$, где C – кривая рода g.

(13) Докажите, что существует комплексный тор алгебраической размерности 1.

(14) Пусть $X = X_{d_1 \cdots d_2} \subset \mathbb{P}^4$ – полное пересечение гиперповерхностей степеней d_1 и d_2. Вычислите числа Ходжа поверхности X.

(15) Пусть поверхность X представляется в виде двулистного накрытия $\pi : X \to \mathbb{P}^2$, разветвленного над кривой $B \subset \mathbb{P}^2$ степени d. Вычислите числа Ходжа поверхности X.

§ 2. Рациональные поверхности

(16) Пусть X – неособая рациональная поверхность. Может ли линейная система $|nK_X|$ быть непуста?

(17) Пусть X – рациональная поверхность с $\rho := \operatorname{rk}\operatorname{Pic}(X) \geq 3$. Докажите, что X содержит по крайней мере ρ кривых с отрицательным индексом самопересечения.

(18) Пусть X – рациональная поверхность. Докажите, что у *каждой* точки $P \in X$ существует окрестность изоморфная аффинной плоскости $\mathbb{A}^2$.

(19) Пусть $X \subset \mathbb{P}^3$ – поверхность степени 3. Пусть $C, C' \subset X$ – неособые рациональные кривые степени 3. Докажите, что $C \cap C' \neq \emptyset$.

(20) Покажите, что на нерациональной поверхности число (-1)-кривых конечно. Приведите пример поверхности с бесконечным числом (-1)-кривых.

(21) Докажите, что любой автоморфизм рациональной поверхности имеет неподвижную точку.

(22) Пусть X – неособая проективная поверхность и пусть $D \subset X$ – приведенная кривая такая, что $X \setminus D \simeq \mathbb{A}^2$. Докажите, что группа $\operatorname{Pic}(X)$ порождается компонентами D.

(23) При каких n и m линейчатые поверхности $\mathbb{F}_n$ и $\mathbb{F}_m$ гомеоморфны? Деформируются друг в друга?

§ 3. Линейчатые поверхности

(24) Пусть $X = \mathbb{F}_n$ – рациональная линейчатая поверхность (поверхность Хирцебруха) с $\mathbb{P}^1$-расслоением $\pi\colon X \to \mathbb{P}^1$. Пусть $D_\pm$ – сечения с индексом самопересечения $\pm n$. Найдите прямой образ $\pi_*\mathcal{O}_X(D_\pm)$.

(25) Пусть $X = \mathbb{F}_n$ – рациональная линейчатая поверхность. Вычислите $e(X)$.

(26) Пусть X – линейчатая поверхность с инвариантом $e(X)$. Покажите, что у X есть сечение с индексом самопересечения $-e(X)$.

(27) Пусть X – линейчатая поверхность над кривой рода g. выведите формулу для канонического класса и вычислите K_X^2.

(28) Предположим, что на минимальной линейчатой поверхности X над эллиптической кривой существуют два непересекающихся сечения C_1 и C_2. Докажите, что $-K_X = C_1 + C_2$.

(29) Предположим, что на минимальной линейчатой поверхности X существуют три непересекающихся сечения. Докажите, что X является произведением.

(30) Докажите, что минимальная линейчатая поверхность содержит не более одной кривой с отрицательным индексом самопересечения.

§ 4. Эллиптические поверхности

(31) Пусть X — поверхность Энриквеса, а $f\colon X \to \mathbb{P}^1$ — эллиптическое расслоение. Докажите, что f имеет не меньше трех вырожденных слоев.

(32) Пусть $X \to \mathbb{P}^1$ — относительно минимальное эллиптическое расслоение. Докажите, что кодаирова размерность X отрицательна тогда и только тогда, когда линейная система $|12K_X|$ пуста.

(33) Пусть Δ — единичный диск с координатой s. Выберем натуральное число m. Рассмотрим поверхность $Y = \mathbb{C} \times \Delta/\Lambda$, где $\Lambda \cong \mathbb{Z}^2$ действует на $\mathbb{C} \times \Delta$ послойными сдвигами на элементы решетки, порожденной 1 и $\sqrt{-1} + s^m$; другими словами,

$$(n, k)\colon (c, s) \mapsto (c + n + k(\sqrt{-1} + s^m), s).$$

Рассмотрим группу $G = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, образующая которой действует на $\mathbb{C} \times \Delta$ по формуле

$$(c, s) \mapsto \left(c + \frac{1}{m}, e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{m}} \cdot s\right).$$

Действие G спускается на Y. Положим $X = Y/G$. Проверьте, что поверхность X гладкая, и слой проекции X на Δ над точкой 0 имеет кратность m.

(34) Пусть X – линейчатая поверхность над эллиптической кривой E. Предположим, что на X также имеется структура эллиптического расслоения. Докажите, что $X \simeq (E \times \mathbb{P}^1)/G$, где G – группа, действующая сдвигами на E.

(35) Приведите примеры эллиптических поверхностей с $\kappa = 1$ и $b_1 = 0$. *Указание.* Примените логарифмическое преобразование Кодаиры к $\mathbb{P}^1 \times E$.

(36) Классифицируйте биэллиптические поверхности. *Указание.* Биэллиптическая поверхность является фактором $E \times C/G$, где E и C — эллиптические кривые, группа G эффективно действует на E и C, причем на C она действует сдвигами, а на E — не только сдвигами.

§ 5. Поверхности Энриквеса

(37) Пусть $\Lambda_1, \Lambda_2 = \mathbb{P}^5$ — скрещивающиеся подпространства в $\mathbb{P}^{11}$, а $V_i \subset \Lambda_i$, $i = 1, 2$, — поверхности Веронезе. Рассмотрим джойн $J(V_1, V_2)$ поверхностей V_1 и V_2. Пусть X — общее сечение многообразия $J(V_1, V_2)$ линейным подпространством коразмерности 3. Докажите, что X — поверхность Энриквеса.

(38) Пусть $|P|$ – эллиптический пучок на поверхности Энриквеса F. Докажите, что $|P|$ содержит в точности два кратных слоя.

(39) Пусть H – обильный дивизор на поверхности Энриквеса F. Докажите, что линейная система $|H|$ содержит неприводимую кривую.

(40) Пусть X поверхность Энриквеса и пусть $f\colon X \to Y$ конечный морфизм степени 2. Докажите, что поверхность Y особа.

(41) Пусть X поверхность Энриквеса и пусть $G \subset \mathrm{Aut}(X)$ – конечная подгруппа. Докажите, что X/G или рациональна или бирациональна поверхности Энриквеса.

(42) Пусть X поверхность Энриквеса и пусть H – обильный дивизор на X с $H^2 = 2$. Докажите, что линейная система $|H|$ не имеет неподвижных компонент.

(43) Пусть X поверхность Энриквеса и пусть $|2F_1|$ и $|2F_2|$ – эллиптические пучки на X такие, что $F_1 \cdot F_2 = 1$. Предположим, что все слои пучка $|2F_1|$ неприводимы. Докажите, что дивизор $E_1 + E_2$ обилен.

(44) Пусть X поверхность Энриквеса и пусть H – обильный дивизор на X с $H^2 = 2$. Предположим, что линейная система $|H|$ не имеет неподвижных компонент (см. задачу 42). Докажите, что общий элемент $H \in |H|$ неприводим и неособ. Имеет ли линейная система $|H|$ базисные точки?

(45) Пусть X поверхность Энриквеса и пусть H – обильный дивизор на X с $H^2 = 4$. Докажите, что линейная система $|H|$ имеет базисные точки.

(46) Пусть X поверхность Энриквеса и пусть H – обильный дивизор на X с $H^2 = 4$. Докажите, что линейная система $|H|$ не имеет неподвижных компонент.