

Алгебраические поверхности
Список задач
Весна 2021 г.

Общие сведения

- (1) Описать отображение Альбанезе для следующих многообразий:
 - (a) комплексный тор,
 - (b) \mathbb{P}^n ,
 - (c) гладкая неприводимая полная кривая рода g .
- (2) Пусть X — компактное кэлерово многообразие, и $\alpha: X \rightarrow \text{Alb}(X)$ — его отображение Альбанезе. Предположим, что образ α — кривая. Докажите, что слои α связны, а кривая $\alpha(X)$ гладкая и имеет род $g(X)$.
- (3) Пусть X — комплексный тор и пусть $C \subset X$ — неприводимая кривая, нормализация которой — эллиптическая. Докажите, что C неособа.

Эллиптические поверхности

- (4) Пусть X — компактная комплексная поверхность, B — неособая кривая, и $f: X \rightarrow B$ — морфизм со связными слоями. Предположим, что $\chi_{\text{top}}(X) = \chi_{\text{top}}(B)\chi_{\text{top}}(X_{\text{тип}})$, где $X_{\text{тип}}$ — типичный слой f . Докажите, что f является либо гладким расслоением, либо эллиптическим расслоением, все вырожденные слои которого имеют тип mI_0 .
- (5) Постройте вторичную поверхность Кодаиры, эллиптическое расслоение на которой имеет три кратных слоя.
- (6) Пусть X — поверхность с $\kappa(X) = 1$. Докажите, что $|nK_X| \neq \emptyset$ для некоторого $n \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$.
- (7) Пусть X — поверхность с $\kappa(X) = 1$. Докажите, что $\dim |nK_X| \geq 1$ для некоторого $n \leq 42$.

Непроективные поверхности

- (8) Пусть S — минимальная компактная комплексная поверхность алгебраической размерности 0 с $b_1(S) > 1$. Докажите, что S не может содержать рациональную кривую арифметического рода 1. *Указание.* Рассмотрите подходящее неразветвленное накрытие S и воспользуйтесь тем, что первое число Бетти минимальных компактных комплексных поверхностей ограничено.
- (9) Пусть группа $\Gamma = \mathbb{Z}$ действует на $W := \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ по правилу

$$(z_1, z_2) \mapsto (\alpha_1 z_1 + \lambda z_2^n, \alpha_2 z_2),$$

где $\alpha_1 = \alpha_2^n$, $0 < |\alpha_1| \leq |\alpha_2| < 1$, $\lambda \neq 0$. Докажите, что W/Γ — компактная комплексная поверхность (поверхность Хопфа). Вычислите ее числа Ходжа. Опишите кривые на ней. Вычислите канонический класс и кодаирову размерность.

- (10) Постройте вторичную поверхность Хопфа с неабелевой группой автоморфизмов.
- (11) Пусть S — поверхность Инуэ с (эффективным) действием конечной группы G . Докажите, что действие G свободно. *Указание.* Воспользуйтесь тем, что $b_1(S) = 1$, $b_2(S) = 0$ и S не содержит кривых.

Поверхности общего типа

- (12) Найдите все поверхности общего типа на прямой Нетера $p_g = \frac{1}{2}K_X^2 + 2$, которые представляются в виде гладкого двойного накрытия \mathbb{F}_n .
- (13) Пусть X — поверхность, представимая в виде двулистного накрытия $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^2$ с дивизором ветвления $B \subset \mathbb{P}^2$ степени 8. Вычислите ее числа Ходжа, а также размерности линейных систем $|nK_X|$ при всех натуральных n . Докажите, что линейная система $|3K_X|$ задает морфизм степени 2.
- (14) Пусть \hat{X} — поверхность, представимая в виде двулистного накрытия $\pi : X \rightarrow \mathbb{F}_2$ с дивизором ветвления $B \in |5\Sigma + 10F|$. Докажите, что прообраз $\hat{\Sigma} \subset \hat{X}$ исключительного сечения $\Sigma \subset \mathbb{F}^2$ является (-1) -кривой, стягивание которой приводит к минимальной поверхности X общего типа. Вычислите ее числа Ходжа, а также размерности линейных систем $|nK_X|$ при всех натуральных n . Докажите, что линейная система $|nK_X|$ не задает бирациональное отображение при $n < 5$.
- (15) Пусть X — поверхность общего типа с $q(X) = 0$ и $p_g(X) \geq 0$. Покажите, что образ отображения, заданного линейной системой $|2K_X|$ двумерен. *Указание.* Если $|2K_X| = F + n|M|$, то ограничение линейной системы $|K_X + F|$ на F — полная линейная система.
- (16) Пусть X — поверхность общего типа с $q(X) = p_g(X) = 0$ и $K_X^2 = 1$. Покажите, что порядок группы $H_1(X, \mathbb{Z})$ не превосходит 6. Исследуйте случаи, когда этот порядок равен 6 и 5.
- (17) Приведите примеры поверхностей общего типа с $q = 1$. Как для них устроено отображение Альбанезе?