Многочлены. Аксиомы, определение. Степень. Существование. Единственность.

$$\deg(f\cdot g) = \deg f + \deg g.$$

$$\deg(f+g) \leq \max(\deg f, \deg g)$$

"$=$" если $\deg f \neq \deg g$.

Делители 0.

Подстановка элемента в многочлен. Многочлены и функции.

# Многочлены

**Определение** $R$ — комм. ассоц. кольцо с 1.
$Q$ называется кольцом многочленов над $R$ (от одной переменной), если $Q \ni t$ выделенный элемент т.ч.

(1) $R \subset Q$ как подкольцо.

(2) $\forall f \in Q$ однозначно представляется в виде
$$f = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n.$$

---

Элементы $Q$ называются многочленами. Элемент $t$ называется независимой переменной. $Q$ обозначается $R[t]$

**Предложение.** $R$ комм. ассоц. с 1.
$\Longrightarrow$ кольцо $R[t]$ существует.
Если $R[t']$ — другое кольцо м-в
$\Longrightarrow \exists \varphi : R[t] \to R[t']$ изом. т.к.
$\varphi(a) = a \quad \forall a \in R.$

Доказательство Единственность (доказано)

Существование.

$R[t] = \{(a_0, a_1, a_2, \dots)\}$

множество последовательностей из элементов $a_i \in R$ т.ч. только конечное число отлично от 0. Определим сложение и умножение. Сложение покомпонентное.

$f = (a_0, a_1, \dots)$ $g = (b_0, b_1, \dots$

$f \cdot g = (d_0, d_1, d_2, \dots)$

$$d_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$$

$R[t]$ является абелевой группой по сложению, умножение коммутативно.

Дистрибутивность: $f = f' + f''$

$f' = (a_0', a_1', \dots), \quad f'' = (a_0'', a_1'', \dots)$

$$d_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j = \sum (a_i' + a_i'') \cdot b_j =$$

$$= \sum_{i+j=k} a_i' b_j + \sum_{i+j=k} a_i'' b_j = d_k' + d_k''.$$

$$\Longrightarrow (f' + f'') \cdot g = f' \cdot g + f'' \cdot g.$$

Ассоциативность.

Положим $s_k = (0, \dots, \overset{k}{\overset{\downarrow}{1}}, 0 \dots)$

$s_0 = 1, \qquad s_k \cdot s_l = s_{k+l}$

$f = \sum a_k s_k, \quad g = b_l s_l, \quad h = c_m \cdot s_m$

$$\Longrightarrow (f \cdot g) \cdot h = \left(\sum a_k s_k \cdot \sum b_l s_l\right) h =$$

$$= \left(\sum a_k b_l s_{k+l}\right) \cdot \sum c_m \cdot s_m =$$

$$= \sum a_k b_l c_m \cdot s_{k+l+m}.$$

$$f\cdot(g\cdot h) = \sum a_k s_k \sum b_l c_m s_{l+m} =$$

$$= \sum a_k \cdot b_l c_m s_{k+l+m}.$$

$\square$

<u>Определение</u> Кольцо формальных степенных рядов

$$R[[t]] = \{(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)\}.$$

сложение и умножение — как выше.

Предложение $R[[t]]$ — коммутативное ассоциативное кольцо с $1$.

$$R[[t]] \supset R[t] \supset R.$$

<u>Замечание</u> Если $k$ — поле, то $k[t]$ — алгебра над $k$. (бесконечномерн,

**Определение.** Степень многочлена

$f = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$

$\deg f = \max\{ i \mid a_i \neq 0 \}$.

**Предложение** Если в $R$ нет делителей $0$ $\Rightarrow$

$\forall f, g \in R[t]$ $f \neq 0, g \neq 0$

(1) $\deg(f \cdot g) = \deg f + \deg g$

(2) $\deg(f+g) \leq \max(\deg f, \deg g)$.

Если $\deg f \neq \deg g \Rightarrow$ "$=$".

**Доказательство.** (1)

$f \cdot g = \sum d_k \cdot t^k \Rightarrow d_k = \sum\limits_{i+j=k} a_i \cdot b_j$

$\deg f = n$ $\deg g = m$ $i \leq n$ $j \leq m$

$k = i+j \leq n+m$. $k > n+m$ $d_k = 0$

$k = n+m$ $i = n, j = m, d_k = a_n b_m$.

(2) $f+g = \sum c_k t^k$ $\qquad \deg f = n$, $\deg g = m$

$c_k = a_k + b_k$.

Пусть, для определенности $n \geq m$)

Если $k > n \Rightarrow c_k = 0$

Если $n > m$, то $c_n = a_n \neq 0$.

$\square$

Подстановка элемента в многочлен.

$f \in R[t]$. $\qquad c \in R$

$\parallel$

$a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$

$f(c) = a_0 + a_1 c + \ldots + a_n c^n$.

$f \longrightarrow$ функцию $R \to R$.

<u>Замечание.</u> $(f+g)(c) = f(c) + g(c)$

$(f \cdot g)(c) = f(c) \cdot g(c)$.

Доказательство

$f = \sum a_i t^i, \quad g = \sum b_j t^j$

$$f \cdot g = \sum_k \sum_{i+j} a_i \cdot b_j t^{i+j}$$

$$f \cdot g(c) = \sum_k \sum a_i b_j c^{i+j}$$

$$\|$$

$$f(c) \cdot g(c) = \sum a_i c^i \cdot \sum b_j c^j$$

совпадают.

**Пример** $\mathbb{k}$ – конечное поле
$c_1 = 1, \ldots, c_q$ – все его элементы.
$$f = (t - c_1) \ldots (t - c_q)$$
$$f(c_i) = 0 \quad \forall\, c_i \in \mathbb{k}.$$
т.е. $f$ – нулевая функция.
$0, f, f \cdot g \quad \forall g \in \mathbb{k}[t]$ определяют нулевую функцию.

---

**Корни многочленов** $c$ – корень $f$, если $f(c) = 0$.

**Теорема** $\forall \alpha_i \in k \ \forall \beta_i \in k$, $i = 0, \dots, n$

$\exists!\, f$ $\deg f \leq n$ т.ч. $f(\alpha_i) = \beta_i$

$$\boxed{\alpha_i \neq \alpha_j}$$

**Доказательство.**

Ищем многочлен в виде
$$f(t) = \sum c_j t^j$$

Условие $f(\alpha_i) = \beta_i$ записывается

$n+1$ неизвестных

$$\sum_{j=0}^{n} c_j \alpha_i^j = \beta_i \qquad i = 0, \dots, n.$$

Матрица

число уравнений = числу неизвестных

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_0 & \alpha_0^2 & & \alpha_0^n \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & & \alpha_1^n \\ - & - & - & - & \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^n \end{vmatrix} \neq 0$$

$\square$

Интерпол. ф-ла Лагранжа

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n} \beta_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{t - \alpha_j}{\alpha_i - \alpha_j}$$

Следствие Многочлен степени $n$ имеет не более $n$ различных корней. $\square$

Следствие $k$ - бесконечное поле $\Rightarrow$ $f = g$ функц. $\Rightarrow$ $f = g$.

## Теорема

$$f(t) = g(t)\cdot(t-c) + \underset{\substack{\| \\ d}}{f(c)}$$

$$\deg g = \deg f - 1$$

## Доказательство

$$f(t) = a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0$$

$$g(t) = b_{n-1} t^{n-1} + \dots + b_1 t + b_0$$

$$\begin{aligned}
b_{n-1} &= a_n \\
b_{n-2} - c b_{n-1} &= a_{n-1} \\
&\dots \\
b_{k-1} - c b_k &= a_k \\
&\dots \\
b_0 - c b_1 &= a_1 \\
d - c b_0 &= a_0
\end{aligned}$$

решаем.

| $c$ | $a_n$ | $a_{n-1}$ | $a_{n-2}$ | | $a_1$ | $a_0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $b_{n-1}$ | $b_{n-2}$ | $b_{n-3}$ | $\ldots$ | | $d$ |

$$b_{n-2} = a_{n-1} + c\,b_{n-1}, \qquad b_{n-3} = a_{n-2} + c\,b_{n-2}$$

Получим разложение

$$f(t) = g(t)(t-c) + d$$

Подставим $t=c$, получим

$$f(c) = d. \qquad \blacksquare$$

<u>Следствие</u>. Пусть $c_1, \ldots, c_m$ – корни многочлена $f \Rightarrow$

$$f(t) = (t-c_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (t-c_m)^{k_m} \cdot g(t)$$

где $g(t)$ не имеет корней.