

Теорема Безу. (каноничность)

Кратность корня.

$$f(t) = (t - \alpha)^k g(t), \text{ где}$$

$$g(\alpha) \neq 0$$

k — кратность.

Простая корень

Кратный корень.

Следствие. $f = \prod (t - \alpha_i)^{k_i} \cdot g$

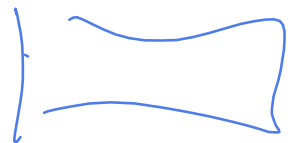
g не имеет корней,

Следствие Зисно корней

исчисляется

с кратностями

$$\leq \deg f.$$



Деление многочленов с остатком

Теорема k -поле.

$$f, g \in k[t] \quad g \neq 0$$
$$\Rightarrow \exists! h, r \in k[t]$$

такие, что

$$f = g \cdot h + r, \quad \underline{\deg r < \deg g}$$

Доказательство.

$$f = a_n t^n + \dots + a_0$$

$$g = b_m t^m + \dots + b_0$$

Максимально
что $n \geq m$,
считая m .

По индукции. (по $\deg(f) = n$.)

$$f_1 = f - \frac{a_n}{b_m} \cdot g \cdot t^{n-m}$$

$$\deg f_1 \leq n.$$

Корень t^n $a_n - \frac{a_n}{b_m} \cdot b_m = 0$

$$\Rightarrow \deg f_1 \leq n-1.$$

По предположению
успешно

$$f_1 = g \cdot h_1 + r$$

$$\deg r_1 < \deg g$$

$$f = \frac{a_n}{b_m} g \cdot t^{n-m} + g h + r$$

$$= g \left(\frac{a_n}{b_m} t^{n-m} + h \right) + r$$

Однозначность.

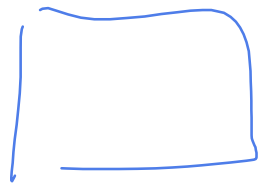
$$f = gh + r = g \cdot h' + r'$$

$$g(h - h') = r' - r.$$

$$\deg(r' - r) < \deg g$$

С гр. стороны,

$$\deg g(h - h') \geq \deg g.$$



Делимость в кольцах

A коммутативное
ассоциативное кольцо
с 1 без делителей 0 .

(целостное кольцо).

Говорят, что $f \in A$
делится на $g \in A, g \neq 0$, если
 $f = g \cdot h$ ($\exists h \in A$)

Обозначение: $g \mid f$
(g делит f)

или $f \equiv 0 \pmod{g}$

Свойства. (1) $g \mid f_1, g \mid f_2$

$\Rightarrow g \mid (f_1 \pm f_2)$

(2) $g \mid f_1, g \mid f_2 \Rightarrow g \mid f_1 \cdot f_2$

(3) $g \mid f, h \mid g \Rightarrow h \mid f$

$$(4) \quad f \mid g, g \mid f \Rightarrow$$
$$f = g \cdot u \quad \text{и обратным}$$

Неразложимый элемент:

$f \in A$ неразложим (простой)
если $g \mid f \Rightarrow$ или
 g обратным или $g = f \cdot u$
и обратным.

Примеры. (1) $A = \mathbb{Z}$

неразложимые = простые
числа.

(2) $A = \mathbb{R}[t]$

Неприводимые многочлены.

\mathbb{R} - кольцо без делителей 0,
(комм., ассоциативное с 1)

$$f = f_1 \cdot f_2 \Rightarrow$$

или $\deg(f_1) = 0$ или $\deg(f_2) = 0$.

Примеры. • Многочлены степени

1 неприводимы.

• Неприводимыми многочленами
степени > 1 не имеет
корней. Обратное не верно.

Пример $x^2 + 1$
Над $\mathbb{R}[x]$
неприводим
неприводим.

$(x^2 + 1)^n$

Теорема $R = k[t]$
 k -поле.

$\Rightarrow \forall f$

$$\exists f = f_1^{k_1} \dots f_r^{k_r}$$

разложение в произведение
ириредуцируемых. Это разложение
единственно с точностью до
порядка и умножения на
обратные элементы (константы).

Доказательство

Кандидатный общий элемент

$$\text{НОД}(f, g) = h \quad \text{т.е.}$$

$$(1) \quad h \mid f, \quad h \mid g$$

$$(2) \quad \text{если } h_1 \mid f \quad \text{и} \quad h_1 \mid g$$

$$\Rightarrow h_1 \mid h$$

Если НОД существует \Rightarrow
он единственен с точностью
до умножения на обратный

Теорема. $R = k[t]$ k -поле

$$\forall f, g \in k[t] \quad \exists \text{ НОД}$$

$$\text{НОД}(f, g) = u \cdot f + v \cdot g$$

$$\exists u, v \in k[t].$$

Доказательство. (аналогично Евклиду). Можно считать, что $g \neq 0$ $g \in F$.

$$f = g \cdot q_1 + r_1 \quad \deg r_1 < \deg g$$

$$g = r_1 \cdot q_2 + r_2 \quad \deg r_2 < \deg r_1$$

$$r_1 = r_2 \cdot q_3 + r_3 \quad \deg r_3 < \deg r_2$$

$$\dots \dots \dots$$
$$r_k = r_{k+1} \cdot q_{k+2} + r_{k+2} \quad \dots \dots \dots$$

$$r_{n-2} = q_n r_{n-1} + r_n$$

$$r_{n-1} = q_{n+1} \cdot r_n$$

$$\Rightarrow r_n \mid r_{n-1}, r_n \mid r_{n-2}, \dots$$

$$r_n \mid g, r_n \mid h.$$

$$r_1 = u_1 f + v_1 g = f - q_1 g$$

$$r_2 = g - r_1 q_2 = u_2 f + v_2 g$$

$$\dots \dots \dots$$
$$r_n = u_n f + v_n g. \Rightarrow \underline{\text{НОД.}} \square$$

Теорема. K - поле.

$\Rightarrow \forall$ многоч. f
степени ≥ 1

$$f = f_1^{k_1} \cdots f_n^{k_n}, \quad f_i$$

лириноводимы.

Разложение единств. верно
с точностью до порядка
множителей.

Существование Углублено
по степени.

Единственность

Лемма p неприм. \Rightarrow
 $p \mid g \cdot h \Rightarrow p \mid g$
или $p \mid h$.

Евклидова норма

$\exists N: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ т. 2.

$$(a) \quad N(f \cdot g) \geq N(f)$$

"=" $\Leftrightarrow g$ - обратим

$$(b) \quad \forall f, g \quad g \neq 0$$

$$\exists f = g \cdot q + r \quad \text{там} \quad r = 0$$
$$N(r) < N(g).$$

Теорема 1 В евклидовом

кольце \exists НОД

$$\text{НОД}(f, g) = f \cdot u + g \cdot v.$$

Теорема 2 Евклидово кольцо

факториально.

Дифференцирование

R — кольцо коммутативных ассоциатов

$D: R \rightarrow R$ — дифференцирование

(1) k — константа

$$(2) D(f \cdot g) = f \cdot D(g) + D(f) \cdot g$$

Свойства $D(1) = 0$

$$(b) D(f^n) = \underline{(n-1)} f^{n-1} \cdot D(f)$$

← использовать

Теорема k — поле \Rightarrow

$$\exists! D: k[t] \rightarrow k[t] \text{ т.ч.}$$

$$D(t) = 1$$

Доказательство

Единство множеств $f = \sum a_i t^i$

$$D(f) = \sum i \cdot a_i t^{i-1}$$

Существование Определим

этой формулой

Проверим условия Лейбница

(1) Это очевидно

(2) по линейности где
всех.

