Дифференцирования

Повторить!

R алгебра коммутативная ассоциативная

$\partial : R \to R$ дифференцирование если

(1) k-линейно.

(2) $\partial(f\cdot g) = f\cdot\partial(g) + \partial(f)\cdot g$.

Свойства (a) $\partial(1) = 0$

(b) $\partial(f^n) = \underline{\underline{(n-1)}}\, f^{n-1}\cdot\partial(f)$. пояснить

Теорема k — поле $\Longrightarrow$

$\exists!\ \partial : k[t] \to k[t]$ т.ч.

$\partial(t) = 1$.

Доказательство

Единственность $f = \sum a_k t^k$

$\mathcal{D}(f) = \sum k \cdot a_k \cdot t^{k-1}$.

Существование Определим

этой формулой

Проверим правило Лейбница

$f = a_n \cdot t^n, \quad g = b_m \cdot t^m$

$\mathcal{D}(f \cdot g) = \mathcal{D}(a_n \cdot b_m t^{n+m}) =$

$= (n+m) \cdot t^{n+m-1} \cdot \mathcal{D}(t) = 1$

$\mathcal{D}(f) \cdot g + f \cdot \mathcal{D}(g) = n a_n t^{n-1} \cdot b_m t^m$

$+ a_n t^n \cdot m b_m t^{m-1} =$

$= (n+m) \cdot a_n \cdot b_m t^{n+m-1}$.

Общий случай. $f = f_n + \dots + f_0$

$g = g_m + \dots + g_0$

$$\mathcal{D}(f \cdot g) = \mathcal{D}\left(\sum f_i g_j\right) =$$

$$= \sum \mathcal{D}(f_i) \cdot g_j + \sum f_i \mathcal{D}(g_j)$$

$$\mathcal{D}(f) \cdot g + f \cdot \mathcal{D}(g) = \sum \mathcal{D}(f_i) \cdot g_j +$$

$$+ \sum f_i \mathcal{D}(g_j)$$

$\square$

Производная многочлена

$$f' = \mathcal{D}(f).$$

Замечание. Возможно что $f'(x) = 0$ это выполнено $\iff$ $a_n \neq 0 \iff k \equiv 0 \mod p$.

Кратные множители

(напомнить.)

Теорема $f \in k[t]$

g = неприводимый множитель кратности m

Пусть выполнено одно из двух:

(1) $\operatorname{char} k = 0$

(2) $\operatorname{char} k = p > 0$, $p \nmid m$ и $p > \deg g$

$\Longrightarrow$ g является корнем кратности $m-1$ для f'

Доказательство: Пусть m' – кратность g в f'

$f = g^m \cdot h$

$f' = m\, g^{m-1} \cdot g' \cdot h + g^m \cdot h' =$

$= g^{m-1} (\ldots)$

$\Rightarrow m' \geq m-1$

Предположим, что $m' \geq m$

$\Rightarrow$ g делит $m g' h$..

$m \neq 0$ в k $\Rightarrow g \mid g' h$

$\Rightarrow g \mid g' \Rightarrow g' = 0$

$g = \sum b_k t^k \quad g' = \sum k b_k t^{k-1}$

$k \cdot b_k = 0 \Rightarrow p \mid k$

$g = \sum b_{p \cdot i} t^{p \cdot i}$ но

$p > \deg g$ по условию. $\square$

<u>Пример</u> $\operatorname{char} k = p > 0$

$f = (t-2)^p, \quad f' = 0$

Следствие $\operatorname{char} k = 0$
или $= p$, $p > m$.

α - корень кратности m f
$\Longrightarrow$ α корень кратности $m-1$ f'

Следствие Кратные корни
f — в точности общие
корни f и f'.

Доказательство

$$f = (t-\alpha)^m \cdot g$$

$$f' = m(t-1)^{m-1} g + (t-\alpha)^m \cdot g$$

α - кратный $\Rightarrow$ $m > 1$ ок

α - корень f и f' $\Longrightarrow$ $m \geq 1$

$\Longrightarrow$ $m \geq 2$. $\square$

Отделение кратных корней.

Ф-ла Тейлора. $\forall$

$f \in \Bbbk[t]$ единственным образом представляется в виде:

$$f = b_n(t-\alpha)^n + \dots + b_1(t-\alpha) + b_0$$

Более того, если $\operatorname{char} \Bbbk = 0$ или $\operatorname{char} \Bbbk > \deg f$, то $b_k = f(\alpha)^{(k)}/k!$

Доказательство. Существование: Индукция по степени. Шаг индукции.

$$f(t) = (t-\alpha)\cdot g(t) + b_0$$

$$g(t) = b_n(t-\alpha)^{n-1} + \dots + b_1$$

Доказательство формулы.

Лемма. $\left((t-\alpha)^l\right)^{(k)}\Big|_{t=\alpha} = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ k! & k = l. \end{cases}$

Доказательство: Опять по индукции.

$k=1$. Очевидно. Шаг индукции.

$$\left((t-\alpha)^k\right)^{(k)} = \left(\left((t-\alpha)^k\right)'\right)^{(k-1)} =$$

$$= \left(k(t-\alpha)^{k-1}\right)^{(k-1)} = k\cdot(k-1)! = k!$$

$\square$

Основная теорема алгебры
(компл. чисел).

Теорема $\forall f \in \mathbb{C}[t]$ $\deg f > 0$
$\Longrightarrow$ f имеет корень в $\mathbb{C}$.

Определение Поле k называется алгебраически замкнутым, если $\forall f \in k[t]$ $\deg f > 0$ имеет корень в k.

Теорема' $\mathbb{C}$ алгебраически замкнуто.

Сходимость последовательностей

Опр. $z_n \to z_0$ если $|z_n - z_0| \to 0$

Лемма $z_n \to z_0 \Longleftrightarrow$
$Re(z_n) \to Re(z_0)$, $Im(z_n) \to Im(z_0)$

Доказательство. $z_n = x_n + i y_n$, $z_0 = x_0 + i y_0$

$(*)$ $|z_n - z_0|^2 = (x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2 \Longrightarrow$

$|x_n - x_0| \leq |z_n - z_0|$
$|y_n - y_0| \leq |z_n - z_0|$

Это доказывает $\Rightarrow$.

$\Leftarrow$ следует из $(*)$.

Лемма $z_n \to z_0 \Rightarrow |z_n| \to |z_0|$

Доказательство:

$$\big||z_n| - |z_0|\big| \leq |z_n - z_0| \quad \square$$

Следствие $z_n \to z_0 \Rightarrow$

$|z_n| \leq C \quad \exists C.$

Лемма $z_n \to z_0, \quad w_n \to w_0$

$$\Rightarrow \quad z_n + w_n \to z_0 + w_0$$

$$z_n \cdot w_n \to z_0 \cdot w_0.$$

Доказательство

$$|z_n + w_n - (z_0 + w_0)| \leq$$

$$\leq |z_n - z_0| + |w_n - w_0|$$

$$|z_n \cdot w_n - z_0 w_0| =$$

$$= |(z_n - z_0) \cdot w_n + (w_n - w_0) \cdot z_0|$$

$$\leq |(z_n - z_0) \cdot w_n| + |(w_n - w_0) \cdot z_0| \quad \square$$

Следствие $f \in \mathbb{C}[t]$ $\quad \square$

$z_n \to z_0 \Rightarrow$

$$f(z_n) \to f(z_0) \quad \square$$

Лемма (о возрастании модуля многочлена). $f \in \mathbb{C}[z] \Longrightarrow$
$\deg f > 0$

$\forall C > 0 \quad \exists R \in \mathbb{R}$ т.ч.
$|f(z)| \geq C$ при $|z| \geq R$.

Доказательство. $f = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$, $a_n \neq 0$

$$A = \max(a_i)$$

$$|f(z)| = |z|^n \cdot \left| a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_0}{z^n} \right|$$

$$\geq |z^n| \left(|a_n| - \left| \frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_0}{z^n} \right| \right)$$

$$\geq |z|^n \left(|a_n| - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \ldots - \frac{|a_0|}{|z|^n} \right)$$

$$\geq |z|^n \left(|a_n| - \frac{A}{|z|} - \ldots - \frac{A}{|z|^n} \right)$$

Можно считать, что

$$|z| \geq (nA + 1)/|a_n| \geq 1$$

$$\Rightarrow |z|^k > |z| \Longrightarrow$$

$$|f(z)| \geq |z|^n \left(|a_n| - \frac{nA}{|z|} \right) =$$

$$= |z|^{n-1} (|a_n| \cdot |z| - nA) \geq |z|^{n-1}$$

Возьмем

$$R := \max\left((nA+1)/|a_n|, \sqrt[n-1]{C} \right)$$

$\square$